

Prof. Dr. Tobias Brandes

Dipl.-Phys. Arash Azhand, Andrea Vüllings M.Sc., Dipl.-Phys. Ken Lichtner

Emely Wiegand B.Sc., Christian Frässdorf B.Sc.

11. Übungsblatt – Theoretische Physik III: Elektrodynamik**Abgabe: Mo. 21.01.2013 bis 11:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude***Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.***Aufgabe 30 (12 Punkte): Viererpotentiale und Feldstärketensor**In einem Bezugssystem Σ sei das folgende Viererpotential gegeben

(1)
$$\mathbf{A} = \frac{a}{2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}, \quad \Phi = 0.$$

- (a) Bestimmen Sie das Viererpotential in einem Bezugssystem Σ' , das sich mit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ relativ zu Σ bewegt.
- (b) Berechnen Sie aus den jeweiligen Viererpotentialen die elektromagnetischen Felder in Σ und Σ' und vergleichen Sie diese.
- (c) Nun müssen wir die Lorentzkraft $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B})$ als Vierervektor schreiben:

(2)
$$K^\mu = Q F^{\mu\nu} \frac{u_\nu}{c},$$

mit der Vierer-Teilchengeschwindigkeit $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{u})$. Wie lautet demzufolge der allgemeine Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ (siehe Gleichung 5, nächste Aufgabe), sowie $F_{\mu\nu}$? Berechnen Sie die Invariante $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$.

Aufgabe 31 (8 Punkte): Maxwellsche Gleichungen in Vierer-Schreibweise

- (a) Zeigen Sie, dass die Vierer-Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen:

(3)
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

(4)
$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\beta F^{\mu\nu} = 0$$

mit

(5)
$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ für Gleichung (3) den Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

und für Gleichung (4)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

entspricht. Dabei bezeichnet $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ das Levi-Civita-Symbol mit den Eigenschaften:

(6)
$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\beta\mu\nu \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ -1, & \text{falls } \alpha\beta\mu\nu \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

11. Übung TPIII WS12/13

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung (3) durch den Ansatz

$$(7) \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

und die Verwendung der Lorentzgleichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ in die Form

$$(8) \quad \square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

gebracht werden kann.

Bonusaufgabe 32 (10 Zusatzpunkte): Lagrangeformalismus und relativistische Teilchen

Gegeben sei die Lagrangefunktion

$$(9) \quad \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\right)^2} - Q\Phi + \frac{Q}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}$$

(a) Zeigen Sie, dass \mathcal{L} die relativistische Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld liefert.

(b) Bestimmen Sie den kanonischen Impuls $\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$ sowie $H = H(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ und zeigen Sie, dass man diese Größen zum Viererimpuls p^μ zusammenfassen kann, indem man sie durch u^μ und A^μ ausdrückt.

(c) Wie lautet die Hamiltonfunktion $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$?

(d) Zeigen Sie, dass die Wirkung $S = \int dt \mathcal{L}$ Lorentzinvariant ist, indem Sie sie durch Vierergrößen ausdrücken.

Vorlesung:	Mittwoch 12:15 Uhr – 13:45 Uhr im EW 203 Freitag 08:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 203
Klausur:	Freitag, 8. Februar 2013, von 08:00 – 10:00 Uhr im EW 203
Tutorien:	Mo 10–12 Uhr in ER 164 bei Christian Di 10–12 Uhr in EB 417 bei Emely Di 12–14 Uhr in EW 731 bei Emely Mi 10–12 Uhr in EW 731 bei Arash/Andrea/Ken Mi 10–12 Uhr in EW 182 bei Christian Do 08–10 Uhr in EW 731 bei Arash/Andrea/Ken Do 10–12 Uhr in EW 731 bei Arash/Andrea/Ken
Sprechzeiten:	Mo 15–16 Uhr in EW 060 bei Emely Mi 15–16 Uhr in EW 632 bei Andrea Do 15–16 Uhr in EW 627 bei Arash Fr 11–12 Uhr in EW 266 bei Ken
Scheinkriterien:	Mindestens 50% der Übungspunkte Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium Bestandene Klausur