Prof. Dr. Tobias Brandes
Dipl.-Phys. Arash Azhand, Andrea Vüllings M.Sc., Dipl.-Phys. Ken Lichtner
Emely Wiegand B.Sc., Christian Frässdorf B.Sc.

13. Übungsblatt – Theoretische Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: Mo. 04.02.2013 bis 11:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 35 (8 Punkte): *Prinzip der lokalen Eichinvarianz*

Hier soll die allgemeine Form des Hamiltonoperators $\hat{H}$ aus der Schrödingergleichung eines Teilchens mit Masse m und Ladung e im elektromagnetischen Feld,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi = \left\{\frac{\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} + e\Phi\right\}\Psi,$$

aus dem freien Hamiltonian $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}$ und dem **Prinzip der lokalen Eichinvarianz** hergeleitet werden: Lokale Eichtransformationen der Wellenfunktion

$$\Psi(\mathbf{x},t) \to \tilde{\Psi}(\mathbf{x},t) \equiv \Psi(\mathbf{x},t)\, e^{i\varphi(\mathbf{x},t)}$$

sollen nichts an der Physik ändern, d.h. wenn $\Psi(\mathbf{x},t)$ Lösung einer zeitabhängigen Schrödingergleichung SG ist, so soll auch $\tilde{\Psi}(\mathbf{x},t)$ eine äquivalente Lösung einer äquivalenten Schrödingergleichung $\tilde{SG}$ sein.
Zeigen Sie, dass durch Verallgemeinerung der Ableitungen ∇ und $\frac{\partial}{\partial t}$ zu *kovarianten Ableitungen*

$$\begin{array}{lll} \nabla \to \mathbf{D}, & \frac{\partial}{\partial t} \to D_0 & (SG)\,, \\ \nabla \to \tilde{\mathbf{D}}, & \frac{\partial}{\partial t} \to \tilde{D}_0 & \left(\tilde{SG}\right) \end{array}$$

das Prinzip der lokalen Eichinvarianz erfüllt werden kann. Machen Sie hierzu den Ansatz

$$\tilde{\mathbf{D}} = \nabla + f(\mathbf{x},t)\,, \quad \tilde{D}_0 = \frac{\partial}{\partial t} + g(\mathbf{x},t)$$

mit den *Eichfeldeldern* $f(\mathbf{x},t)$ und $g(\mathbf{x},t)$ und berechnen Sie damit, wie sich die Eichfelder transformieren müssen, wenn man

$$\tilde{\mathbf{D}}\Psi = e^{i\varphi(\mathbf{x},t)}\mathbf{D}\Psi, \quad \tilde{D}_0\Psi = e^{i\varphi(\mathbf{x},t)}D_0\Psi$$

fordert.Ersetzen Sie nun in der ursprünglich freien SG, $i\partial_t\Psi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi$, die Ableitungen durch die entsprechenden kovarianten Ableitungen. Schreiben Sie die neugewonnenen SG sowie $\tilde{SG}$ auf. Identifizieren Sie die Eichfelder $f(\mathbf{x},t)$ und $g(\mathbf{x},t)$ durch Umbenennung als Vektorpotential $\mathbf{A}$ bzw. skalares Potential Φ der Elektrodynamik.

Aufgabe 36 (6 Punkte): *Feldstärketensor und Eichtheorie*

(a) Beweisen Sie durch Anwendung auf ein Feld $\Psi(x)$ die Identität für den Feldstärketensor $\mathcal{F}_{\mu\nu}$,

$$[D_\mu, D_\nu] = i\mathcal{F}_{\mu\nu},$$

wobei D_μ die kovariante Ableitung und $[,]$ der Kommutator ist.

(b) Leiten Sie daraus das Verhalten,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \to g(x)\,\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)\,g^{-1}(x)\,,$$

von $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ unter Eichtransformationen her.

13. Übung TPIII WS12/13

Aufgabe 37 (6 Punkte): *Lie-Gruppen und Transformationen im n-dimensionalen Raum*

Betrachten Sie eine Gruppe von Transformationen mit r Parametern eines n-dimensionalen Raumes ($\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$), so werde beispielsweise jedem $x = \left(x^i;\, i = 1, 2, \ldots, n\right)$ eine

$$x' = f\left(x;\, a_1, \ldots, a_r\right),$$

mit den Gruppenparametern $a_1, \ldots, a_r$ zugeordnet. Üblicherweise nehme man noch an, dass $x = f\left(x;\, 0, 0 \ldots, 0\right)$ gilt. Eine Funktion $F\left(x\right)$ transformiert sich unter einer infinitesimalen Transformation da folgendermaßen:

$$\begin{aligned} F\left(x'\right) &= F\left(f\left(x, da\right)\right) = F\left(x + dx\right) \\ &= \sum_{\mu=1}^{r} \left(-i\right) da_\mu \hat{L}_\mu\left(x\right) F\left(x\right), \end{aligned}$$

mit den Operatoren (Generatoren)

$$\begin{aligned} \hat{L}_\mu &= i \sum_{j=1}^{n} u_{j\mu}\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a_\mu} f_j\left(x,\, a\right)|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mu = 1,\, \ldots,\, r \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die $\hat{L}_\mu$ für eine Zwei-Parameter-Gruppe, gegeben durch

$$x' = ax + b \quad \left(a, b \in \mathbb{R}\right).$$

(b) Berechnen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{L}_\mu, \hat{L}_\nu\right]_-$ $\quad(\mu,\, \nu = a,\, b)$.

(c) Wieviele Parameter besitzt die spezielle orthogonale Gruppe in n Dimensionen, $SO\left(n\right)$? Finden Sie eine Menge von Generatoren.

(d) Zeigen Sie, dass die infinitesimalen Operatoren für die Gruppe $SO\left(n\right)$ geschrieben werden können als

$$\hat{L}_{pr} = -i\left(x_p \frac{\partial}{\partial x_r} - x_r \frac{\partial}{\partial x_p}\right), \;\; p, r = 1,\, \ldots,\, n;\;\; r > p$$