Prof. Dr. Tobias Brandes
Dipl.-Phys. Arash Azhand, Andrea Vüllings M.Sc., Dipl.-Phys. Ken Lichtner
Emely Wiegand B.Sc., Christian Frässdorf B.Sc.

2. Übungsblatt – Theoretische Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: Mo. 05.11.2012 bis 11:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 4 (14 Punkte): *Zwei parallele geerdete Metallplatten (10 + 4 Zusatzpunkte)*

a) Berechnen Sie einen formalen Ausdruck für die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ für den Raum zwischen zwei parallelen, unendlich ausgedehnten geerdeten Platten (mit Potential Null), die sich bei $z = 0$ und bei $z = d$ befinden. Bestimmen Sie hierzu einen Satz von Basisfunktionen, die die Randbedingungen erfüllen und berechnen Sie daraus den formalen Ausdruck für die Greensche Funktion zu

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \int \frac{d\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot (\mathbf{r}'_\parallel - \mathbf{r}_\parallel)} g(z, z', \mathbf{k}_\parallel),$$

$$g(z, z', \mathbf{k}_\parallel) = \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi z/d)\sin(n\pi z'/d)}{(n\pi/d)^2 + k^2}.$$

b) Wir setzen nun eine Ladung q an den Ort $\mathbf{r}'$ zwischen die Platten. Per Definition beschreibt $q\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ das Potential, das durch die Punktladung erzeugt wird. Überlegen Sie, welchen Symmetrien die Greensche Funktion gehorcht bezüglich Spiegelung und Translation um $2d$ des Ortes $\mathbf{r}'$. Schlussfolgern Sie daraus, wo sich welche Scheinladungen befinden.

c) Wir betrachten nun die Greensche Funktion $g(z, z', \mathbf{k}_\parallel)$, die bezüglich x und y fouriertransformiert ist. Sie gehorcht der transformierten Poissongleichung

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mathbf{k}_\parallel^2\right) g(z, z', \mathbf{k}_\parallel) \;=\; \delta(z - z')$$

und der Randbedingung $g(z, z', \mathbf{k}_\parallel) = 0$ bei $z = 0$ und bei $z = a$. Machen Sie einen Ansatz zur Lösung der homogenen Bestimmungsgleichung. Um die Koeffizienten dafür zu ermitteln, brauchen wir noch die Bedingung, die durch die Inhomogenität auferlegt wird, nämlich

$$-\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\partial}{\partial z} g(z, z', \mathbf{k}_\parallel)\Bigg|_{z=z'-\epsilon}^{z=z'+\epsilon} = 1.$$

Nehmen Sie an, dass g auch bei $z = z'$ stetig ist und zeigen Sie, dass gilt

$$g(z, z', \mathbf{k}_\parallel) \;=\; \frac{\sinh(kz_<)\sinh[k(d - z_>)]}{k\sinh(kd)}. \tag{1}$$

mit $k = |\mathbf{k}_\parallel|$, $z_< = \min(z, z')$ und $z_> = \max(z, z')$.

d) **Zusatzaufgabe:** Zeigen Sie, dass beide Ansätze auf das geiche Ergebnis führen. Bestimmen Sie hierzu die Fourierkoeffizienten für Gleichung 1.

Aufgabe 5 (4 Punkte): *Laplaceoperator angewendet auf die Deltafunktion*

Verifizieren Sie die bekannte Relation $\Delta \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \;=\; -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ nochmals durch Fouriertransformation des Yukawa-Potentials $V(\mathbf{r}) \equiv \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ mit $\alpha > 0$ im Limes $\alpha \to 0$.

Aufgabe 6 (6 Punkte): *Poisson-Boltzmann-Gleichung*
Die Poisson-Boltzmann-Gleichung lautet (wie aus der Vorlesung bekannt):

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha n_{0,\alpha} e^{-\beta q_\alpha \Phi(\boldsymbol{r})}.$$

Betrachten Sie den Fall mit $M = 1$, d.h. einer Sorte von positiven Gegen-Ionen mit Ladung q_+ im Halbraum $z > 0$, die eine konstante, homogene negative Flächenladungsdichte σ auf der Randfläche $z = 0$ insgesamt elektrisch kompensieren. Lösen Sie hierfür die Poisson-Boltzmann-Gleichung als von-Neumann-Problem.

a) Wie lauten die von-Neumann Randbedingungen bei $z = 0$ und $z = \infty$?

b) Bestimmen Sie das Potential $\Phi(z)$ und die Dichte $n(z)$ der Gegen-Ionen.

c) Drücken Sie beide Funktionen explizit durch die Einführung der drei Längenskalen

$$\begin{aligned} b &\equiv \frac{2k_BT\epsilon}{|\sigma|q_+}, \quad \text{Gouy-Chapman-Länge} \\ \lambda_D &\equiv \left(\frac{2n_0q_+^2}{\epsilon k_BT}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{Debye-Hückel-Länge} \\ l &\equiv \frac{q_+^2}{\epsilon k_BT}, \quad \text{Bjerrum-Länge} \end{aligned}$$

aus.

Vorlesung:	Mittwoch 12:15 Uhr – 13:45 Uhr im EW 203 Freitag 08:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 203
Klausur:	Mittwoch, 8. Februar 2013, von 08:00 – 10:00 Uhr im EW 203
Tutorien:	Mo 10–12 Uhr in ER 164 bei Christian Di 10–12 Uhr in EB 417 bei Emely Di 12–14 Uhr in EW 731 bei Emely Mi 10–12 Uhr in EW 731 bei Arash/Andrea/Ken Mi 10–12 Uhr in EW 182 bei Christian Do 08–10 Uhr in EW 731 bei Arash/Andrea/Ken Do 10–12 Uhr in EW 731 bei Arash/Andrea/Ken
Sprechzeiten:	Mo 15–16 Uhr in EW 060 bei Emely Mi 14–15 Uhr in EW 630 bei Andrea Do 15–16 Uhr in EW 627 bei Arash Fr 11–12 Uhr in EW 266 bei Ken
Scheinkriterien:	Mindestens 50% der Übungspunkte Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium Bestandene Klausur