Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

17. Januar 2014

11. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Montag 03.02.14 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Zeitartige Geodäten in der Schwarzschildmetrik*

Leiten Sie aus der Lagrangefunktion

$$L = g_{ab}\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau} = (1-\frac{2m}{r})c^2\dot{t}^2 - (1-\frac{2m}{r})^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\Theta}^2 + sin^2\Theta\dot{\phi}^2)$$

die Bewegungsgleichungen für ein massives Testteilchen in der Schwarzschildmetrik ab (die Abkürzung $\dot{A} := \frac{dA}{d\tau}$ bezeichnet die Eigenzeitableitung).

a) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Koordinaten t, ϕ und Θ auf. Welche Koordinaten sind zyklisch? Warum kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\Theta = \pi/2$ gesetzt werden?

b) Anstatt die Euler-Lagrange-Gleichungen für r aufzustellen, kann die Lagrangefunktion als erstes Integral für r benutzt werden, da für $L = c^2$ gilt. Warum gilt $L = c^2$? Benutzen Sie die in a) erhaltenen Ergebnisse um in der Ebene $\Theta = \pi/2$ die Bewegungsgleichung für r aufzustellen.

c) Bestimmen Sie, in Analogie zum Energiesatz der Newtonschen Theorie

$$\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{\mu}{2}d^2,$$

das effektive Potenzial V_{eff} für diesen Fall. Hier sind μ die träge Masse des Testteilchens und d die der Energie zugeordnete Erhaltungsgröße. Zeichnen Sie das effektive Potenzial schematisch und diskutieren Sie die möglichen Bahntypen.