Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

14. Oktober 2013

1. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Montag 04.11.13 vor der Übung

Aufgabe 1 (3 Punkte): *Symmetrieeigenschaften von Tensoren*

Zeigen Sie, dass für einen Tensor $T_{\alpha\beta\gamma}$ 3. Stufe gilt:

(i) Wenn $T_{\alpha[\beta\gamma]} = 0$ und $T_{(\alpha\beta)\gamma} = 0$ gilt, dann ist $T_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

(ii) Wenn $T_{[\alpha\beta]\gamma} = 0$, dann ist $T_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta})$.

(iii) Wenn $T_{(\alpha\beta)\gamma} = 0$, dann ist $T_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta})$.

Aufgabe 2 (2 Punkte): *Eigenschaften von Tensoren unter Transformationen*

a) Zeigen Sie unter Benutzung der Transformationsregel für Tensoren und der Definitionen des symmetrischen Anteils eines Tensors $T_{\alpha\beta}$, dass der symmetrische Anteil des transformierten Tensors $T'_{\alpha\beta}$ nur eine Funktionen des symmetrischen Anteils des nicht-transformierten Tensors $T_{\alpha\beta}$ sind.
b) Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft auch für den total antisymmetrischen Anteil $T_{[\alpha\beta\gamma]}$ eines Tensors $T'_{\alpha\beta\gamma}$ gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte): *Symmetrieeigenschaften von Tensoren*

a) Zeigen Sie, dass für einen Tensor 4. Stufe mit der Eigenschaft $T_{\alpha\beta\gamma\delta} = -T_{\beta\alpha\gamma\delta} \Longleftrightarrow T_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = 0$, gilt:

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha\beta\gamma\delta} = T_{\gamma\delta\alpha\beta} - \frac{3}{2}\left(T_{[\beta\alpha\gamma]\delta} + T_{[\beta\delta\gamma]\alpha} + T_{[\delta\alpha\gamma]\beta} + T_{[\alpha\beta\delta]\gamma}\right) + \\
+ T_{\gamma\beta(\delta\alpha)} + T_{\alpha\gamma(\delta\beta)} + T_{\beta\delta(\alpha\gamma)} + T_{\delta\alpha(\beta\gamma)} + T_{\delta\gamma(\beta\alpha)} + T_{\alpha\beta(\delta\gamma)}.
\end{aligned}
$$

Beachten Sie, dass man zur Vereinfachung der ersten Klammer das Ergebnis aus Aufgabe 1 (iii) nutzen kann.
b) Es sei $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ein beliebiger Tensor 4. Stufe mit den Symmetrieeigenschaften $K_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = 0$, $K_{\alpha\beta(\gamma\delta)} = 0$ und $K_{\alpha\beta\gamma\delta} = -K_{\gamma\delta\alpha\beta}$. Wieviele unabhängige Komponenten besitzt dieser Tensor im zweidimensionalen Raum und wie lauten diese.

Weiteres
T. Chrobok, Sprechstunde: Freitag 11.00-13.00 EW 740. Für den Erhalt des Übungsscheines sind 50% der zu erreichenden Punkte notwendig. Die Übungen werden bitte in dreier Gruppen abgegeben.