Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

25. November 2013

5. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Freitag 02.12.13 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Rindler-Koordinaten*

Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$x^0 = (x'^1 + \frac{1}{a}) \sinh(ax'^0) \quad x^1 = (x'^1 + \frac{1}{a}) \cosh(ax'^0) \quad x^2 = x'^2 \quad x^3 = x'^3 \tag{1}$$

die den Übergang in ein Nichtinertialsystem im Minkowski Raum beschreibt.
a) Bestimmen Sie den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \eta_{\rho\kappa}$$

für die durch die Transformation (1) implizierten Koordinaten.
b) Zeichnen Sie das Raum-Zeit-Diagramm für einen im Koordinatensystem K' ruhenden Beobachter bezüglich K. Zeichnen Sie den Lichtkegel und die Weltlinie eines anderen Inertialsystems. Welcher Effekt tritt neu hinzu, wenn man die Kurve von K' als die Weltlinie eines Teilchens betrachtet?
c) Geben Sie den kontravarianten metrischen Tensor, welcher über $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$ definiert ist, an.
d) Berechnen Sie alle Christoffelsymbole

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\beta\rho,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho})$$

für diese Koordinaten. Nutzen Sie deren Symmetrie im unteren Indexpaar aus.
e) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung (Geodätengleichung)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0$$

in diesen Koordinaten die Form

$$\frac{d^2 x^0}{dt^2} + 2 \frac{a}{(1 + ax^1)} \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^0}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + a(1 + ax^1) \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} \delta^i_1 = 0$$

annimmt.
f) Bestimmen Sie für die Lagrange-Funktion

$$L = (ds/d\tau)^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

mittels der in a) bestimmten Metrik, die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0,$$

wobei $\dot{x}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau}$ ist.