Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

11. Übungsblatt – Biologische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 15.01.2014 in der Übung

M Aufgabe 33: *Biegung*

Berechnen Sie die Biegeenergie eines elastischen dünnen Stabes der Länge $\pi R/2$, der zu einem Kreisbogen mit Radius R gebogen ist. Der Stab hat die Persistenzlänge A und damit die Biegesteifigkeit Ak_BT. Das Kreisstück sei folgendermaßen parametrisiert:

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} R\cos(s/R) \\ R\sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

M Aufgabe 34: *Zufallsgeher auf kubischem Gitter*

Wie lautet die Fundamentallösung $p(\mathbf{r}, t)$ der Diffusionsgleichung in 3D aus Aufgabe 12? Was erhält man für den mittleren quadratischen Abstand $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ des Teilchens vom Ursprung?
Betrachten Sie nun eine Polymerkette, die aus N Segmenten der Länge L_{seg} besteht. Die Glieder sollen mit rechten Winkeln verbunden sein. Was erhalten Sie für den mittleren quadratischen End-zu-End-Abstand $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ der Polymerkette?

M Aufgabe 35: *Eigenfunktion des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten*

Sie $\mathbf{r}$ ein normierter Ortsvektor in Kugelkoordinaten, d.h. $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r$. Berechnen Sie $\nabla^2_\Omega \mathbf{r}$, wobei ∇^2_Ω der Winkelanteil des ∇^2 Operators in Kugelkoordinaten ist.

S Aufgabe 36 (10 Punkte): *Persistenzlänge*

(a) Sei $\mathbf{t}(s)$ der normierte Tangentialvektor eines Polymers an der Stelle s entlang der Polymerkontur. Zeigen Sie, dass für die Korrelationsfunktion

$$\langle \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s') \rangle = e^{-|s-s'|/A}$$

gilt, mit Persistenzlänge A.

Stellen Sie wieder eine Analogie zu einem Zufallsgeher her: Der Richtungsvektor $\mathbf{e}(t)$ eines kontinuierlichen Zufallsgehers führt Rotationsdiffusion auf einer Kugel aus, d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\Omega, t)$ von $\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_r(t)$ gehorcht der Diffusionsgleichung in Kugelkoordinaten:

$$\partial_t p(\Omega, t|\Omega', t') = D_r \nabla^2_\Omega p(\Omega, t|\Omega', t') , \quad t' \leq t , \tag{1}$$

mit Rotationsdiffusionskonstante D_r. Ω ist stellvertretend für $\{\varphi, \vartheta\}$ und ∇^2_Ω ist demnach der Winkelanteil des ∇^2 Operators in Kugelkoordinaten. Berechnen Sie die Korrelationsfunktion $\langle \mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{e}(t') \rangle$. Wie hängt die Rotationsdiffusionszeit $\tau_r \equiv (2D_r)^{-1}$ mit der Persistenzlänge A zusammen?

Hinweis: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(x, t|x', t')$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass x zur Zeit t eintritt, wenn x' zur Zeit t' auf jeden Fall eintritt. Damit gilt für $p(x, t; x', t') \equiv p(x, t) \cap p(x', t')$, dass $p(x, t; x', t') = p(x, t|x', t')p(x', t')$.

Hinweis: Die Korrelationsfunktion ist definiert als:

$$\langle x(t)\, x(t') \rangle = \iint x\, x'\, p(x, t; x', t')\, dx dx' .$$

(b) Bestimmen Sie den mittleren quadratischen End-zu-End-Abstand $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ eines semiflexiblen Polymers ohne äußere Kraft. Wie lässt sich das Modell des kontinuierlichen semiflexiblen Polymers auf das diskrete Modell aus Aufgabe 34 übertragen?