Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 9. April 2014
http://www.tu-berlin.de/?145990

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

1. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 23.04.2014 in der Übung (10:15 EW 731)

Zum Übungsbetrieb:
Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche M und schriftliche S Aufgaben. Die Bedingung für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Es müssen mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte erreicht werden. Die Abgabe erfolgt in Zweiergruppen.
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.

M **Aufgabe 1**: *Vektoren und Tensoren I*

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \,, \\ (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a} &= \frac{1}{2}\nabla \mathbf{a}^2 - \mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{a} \,. \end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie nun die Identitäten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Phi \mathbf{a}) &= \nabla \Phi \cdot \mathbf{a} + \Phi \nabla \cdot \mathbf{a} \,, \\ \nabla \times (\Phi \mathbf{a}) &= \nabla \Phi \times \mathbf{a} + \Phi \nabla \times \mathbf{a} \,, \\ \nabla \cdot (\nabla \Phi \times \nabla \Psi) &= 0 \,, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ Vektoren und Φ und Ψ Skalare sind.

(c) Zeigen Sie: Für einen Tensor $\mathbf{T}$ zweiter Stufe und einen Vektor $\mathbf{a}$ gilt:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{a}) = \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{T}\nabla) \cdot \mathbf{a} \,.$$

Hinweis: Die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe ist ein Vektor mit den Komponenten $(\nabla \cdot \mathbf{T})_i = \sum_j \partial_j T_{ij}$.

(d) Gegeben sei ein Vektorfeld $\mathbf{a}$. Zerlegen Sie dessen Gradienten in einen symmetrischen Anteil $\mathbf{S}$ und in einen antisymmetrischen Anteil $\mathbf{A}$ und zeigen Sie, dass für jeden Vektor $\mathbf{b}$ gilt:

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} \,.$$

Hinweis: Der Gradient eines Vektorfeldes ist eine Matrix mit den Komponenten $(\nabla \mathbf{a})_{ij} = a_{i,j}$.

S **Aufgabe 2 (5 Punkte):** *Vektoren und Tensoren II*

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten für die Tensoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{Aa} \cdot \mathbf{Aa} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{Aa}) \cdot \mathbf{a} \,, \\ (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \,, \\ (\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \,, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{a}$ ein Vektor ist.

Im Zusammenhang mit der Tensorrechnung wird häufig das dyadische Produkt gebraucht. So kann ein Tensor $\mathbf{A}$ dargestellt werden als:

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \ .$$

(b) Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ des $\mathbb{R}^3$. Wie lauten die Eigenvektoren des dyadischen Produkts $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$? Was bedeutet damit anschaulich das dyadische Produkt? Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{M} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.

(c) Sei $\mathbf{r}$ ein Ortsvektor in $\mathbb{R}^3$, mit $r = |\mathbf{r}|$. Berechnen Sie $\nabla \otimes \nabla r$.

S **Aufgabe 3 (5 Punkte):** *Krummlinige Koordinaten*

Gegeben seien die Basisvektoren $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ in Zylinderkoordinaten sowie $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ in Kugelkoordinaten.

(a) Berechnen Sie $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a}$, wobei $\mathbf{a} = a_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi$.

(b) Berechnen Sie $\nabla \otimes \mathbf{a}$, wobei $\mathbf{a} = a_r(r,\theta)\mathbf{e}_r + a_\theta(r,\theta)\mathbf{e}_\theta$.

(c) Berechnen Sie $\nabla^2 \mathbf{a}$, wobei $\mathbf{a} = a_r(r)\mathbf{e}_r$.

(d) Berechnen Sie $\nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{a}}{r \sin\theta}\right)$, wobei $\mathbf{a} = a_\varphi(r,\theta)\mathbf{e}_\varphi$.