

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

5. Übungsblatt – Biologische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 20.11.2013 in der Übung

S Aufgabe 15 (10 Punkte): *Persistenter Zufallsgeher in 1D*

Polymere haben eine gewisse Steifigkeit, die mit dem folgenden einfachen Modell beschrieben werden kann: Ein Zufallsgeher bewege sich auf einem 1D Gitter mit Gitterplätzen n und Gitterkonstante L . Bei jedem Schritt behält er seine ursprüngliche Bewegungsrichtung mit einer Wahrscheinlichkeit α bei oder läuft mit der Wahrscheinlichkeit $\beta = 1 - \alpha$ in die umgekehrte Richtung. Gesucht ist die Diffusionskonstante D dieser Bewegung.

- (a) Seien $a_k(n)$ und $b_k(n)$ die Wahrscheinlichkeiten, dass der Zufallsgeher sich zum Zeitpunkt k auf dem Gitterplatz n befindet und im Schritt davor von Platz $n - 1$ bzw. $n + 1$ gekommen ist. Überzeugen Sie sich davon, dass folgende Rekursions-Gleichungen (Master-Gleichungen) gelten:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{k+1}(n) = \alpha a_k(n-1) + \beta b_k(n-1) , \\ b_{k+1}(n) = \alpha b_k(n+1) + \beta a_k(n+1) . \end{cases}$$

Da wir einen diskreten Prozess auf einem Gitter betrachten, ist es sinnvoll, die charakteristischen Funktionen (Fourier-Transformierten) $A_k(\theta)$ und $B_k(\theta)$ von $a_k(n)$ bzw. $b_k(n)$ einzuführen:

$$(2) \quad A_k(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k(n) e^{in\theta} , \quad B_k(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_k(n) e^{in\theta} .$$

Wie lauten die transformierten Rekursions-Gleichungen (1) für $A_k(\theta)$ und $B_k(\theta)$?

- (b) Kombinieren Sie die Rekursions-Gleichungen zu einer Bestimmungsgleichung nur für $A_k(\theta)$ und einer Bestimmungsgleichung nur für $B_k(\theta)$.
- (c) Uns interessiert nur die Gesamtwahrscheinlichkeit $p_k(n) = a_k(n) + b_k(n)$, den Zufallsgeher zur Zeit k am Ort n aufzufinden. Welche Rekursions-Gleichung gilt für $P_k(\theta)$? Lösen Sie diese Gleichung mit dem Ansatz $P_k(\theta) \stackrel{!}{=} U^k(\theta)$. Was ergibt sich für die Funktion $U(\theta)$? Wie setzt sich daraus die allgemeine Lösung für $P_k(\theta)$ zusammen?
- (d) Eine spezielle Lösung ergibt sich mit den Anfangsbedingungen

$$(3) \quad a_0(n) = b_0(n) = \frac{\delta_{n,0}}{2} .$$

Was ist die anschauliche Bedeutung dieser Anfangsbedingung? Zeigen Sie, dass daraus

$$(4) \quad P_0(\theta) = 1 , \quad P_1(\theta) = \cos \theta$$

folgt. Wie lautet die Lösung $P_k(\theta)$ für diese Anfangsbedingungen?

- (e) Bestimmen Sie aus $P_k(\theta)$ die Momente $\langle n \rangle$ und $\langle n^2 \rangle$. Was ergibt sich daraus für die Diffusionskonstante

$$(5) \quad D = \frac{\langle x^2 \rangle}{2t} \quad \text{mit } x = nL, t = k\tau$$

(τ ist eine charakteristische Sprungzeit) im Langzeitlimites $k \rightarrow \infty$? Welchen Einfluss hat die „Persistenz“ auf D ? Auf der Skala der sog. Persistenzlänge ℓ ergibt sich ein gewöhnlicher Zufallsgeher (mit dem üblichen Diffusionskoeffizienten). Wie ist diese Länge zu wählen?

5. Übung BP WS13

M Aufgabe 16: *Bakterieller Metabolismus*

Wir betrachten ein idealisiertes Bakterium in Form einer Kugel mit Radius R . Das Bakterium befindet sich in einem See, von dem es Sauerstoff bezieht. Da der See ein riesiges Reservoir an Sauerstoff darstellt, wird das Bakterium die gesamte Sauerstoffkonzentration c_0 des Sees nicht merklich beeinflussen. Es wird sich ein stationärer Zustand einstellen, bei dem die Sauerstoffkonzentration $c(r)$ nur vom Abstand r zum Bakterium (und nicht von der Zeit) abhängt.

- (a) Weit weg vom Bakterium ist die Konzentration $c(\infty) = c_0$. Wir nehmen an, dass das Bakterium den ganzen Sauerstoff in ihrer unmittelbaren Umgebung aufnimmt: $c(R) = 0$. Dieses Konzentrationsgefälle bedeutet nach dem 1. Fick'schen Gesetz, dass es einen Fluss j von Sauerstoffmolekülen ins Innere des Bakteriums geben muss:

$$j = -D \frac{dc}{dr}.$$

Bestimmen Sie das Konzentrationsprofil $c(r)$. Hierbei ist die Erhaltung der Teilchenzahl zu berücksichtigen. Welche Beziehung $I = I(R)$ ergibt sich für die Menge Sauerstoff, die ein Bakterium mit Radius R pro Zeit maximal aufnehmen kann?

- (b) Die in a) bestimmte Größe I beschreibt die maximal mögliche Menge Sauerstoff, die das Bakterium pro Zeit aufnehmen kann. Einerseits wächst I linear mit dem Bakterienradius. Andererseits nimmt jedoch der Sauerstoffverbrauch eines Bakteriums mit seinem Volumen zu ($\sim R^3$). Folglich wird es für die Größe des Bakteriums eine obere Schranke R_c geben. Sei \mathcal{J} der Sauerstoffverbrauch des Bakteriums (pro Zeit), bezogen auf seine Masse. Welche Beziehung $R_c = R_c(\mathcal{J}, c_0, D, \rho)$ gilt für den maximalen Bakterienradius? (ρ ist hierbei die Massendichte des Bakteriums.)
- (c) Welcher Wert ergibt sich mit $\mathcal{J} = 0,02 \text{ mol}/(\text{kg s})$, $c_0 = 0,2 \text{ mol}/\text{m}^3$, $D = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ und $\rho \approx \rho_{\text{Wasser}}$? Vergleichen Sie dies mit einem realistischen Wert für die Größe von Bakterien. Welche Möglichkeit könnte es für Bakterien geben, diese obere Grenze für das Wachstum zu überschreiten?