

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

6. Übungsblatt – Biologische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 27.11.2013 in der Übung

M Aufgabe 17: Deformation und Drehung

Gegeben sei das folgende Geschwindigkeitsfeld in \mathbb{R}^2 ($\gamma > 0$):

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \gamma y \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsfeld und berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{A} sowie den Drehgeschwindigkeitstensor \mathbf{W} .
- Finden Sie eine geeignete Basis, in der \mathbf{A} diagonal wird und interpretieren Sie die Eigenwerte.
- Finden und skizzieren Sie ein Geschwindigkeitsfeld, welches die Bedingung $\mathbf{W} = 0$ erfüllt, mit \mathbf{A} wie in (a).
- Finden und skizzieren Sie ein Geschwindigkeitsfeld, welches die Bedingung $\mathbf{A} = 0$ erfüllt, mit \mathbf{W} wie in (a).

S Aufgabe 18 (4 Punkte): Wirbelstärke

Die Wirbelstärke $\omega \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ stellt eine zentrale Größe der Hydrodynamik dar und kann anschaulich als die Tendenz eines Fluidelements zur Eigendrehung um eine Achse beschrieben werden.

- Leiten Sie ausgehend von der Navier-Stokes-Gleichung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p,$$

folgende Gleichung für die Wirbelstärke ω her:

$$(1) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega)$$

In dieser Aufgabe sollen zweidimensionale inkompressible Flüssigkeiten (d.h. solche mit $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) untersucht werden. Das Geschwindigkeitsfeld einer solchen Flüssigkeit lässt sich darstellen als

$$(2) \quad \mathbf{v} = \nabla \times (\Phi(x, y, t) \mathbf{e}_z),$$

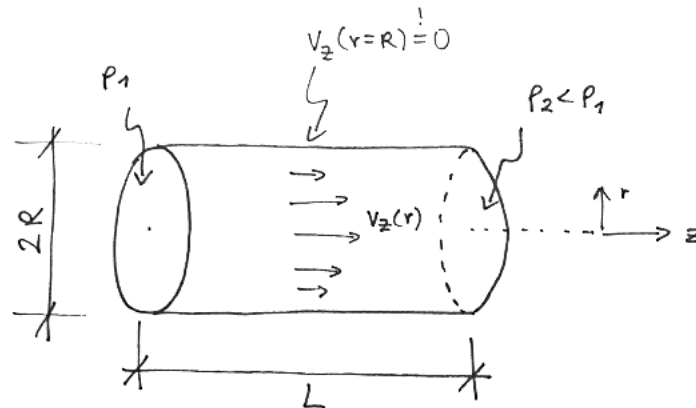
mit der sog. Strömungsfunktion $\Phi(x, y, t)$. Im Folgenden soll nun eine stationäre Strömungsfunktion $\Phi(x, y, t) \equiv \Phi(x, y) \equiv \Phi(|\mathbf{r}|)$ betrachtet werden.

- Es gelte $\omega = 0$. Welche Differentialgleichung erhalten Sie nun für Φ ? Lösen Sie diese Gleichung und finden Sie $\Phi(|\mathbf{r}|)$.
- Es gelte $|\omega| = 2\omega_0 = \text{const.}$. Finden Sie $\Phi(|\mathbf{r}|)$.
- Berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{A} sowie den Drehgeschwindigkeitstensor \mathbf{W} für beide Fälle und erläutern Sie den qualitativen Unterschied.

6. Übung BP WS13

S Aufgabe 19 (4 Punkte): Poiseuille Strömung

Eine wichtige Anwendung der Navier-Stokes-Gleichungen ist die Strömung einer Flüssigkeit durch



ein zylindrisches Rohr mit Radius R und Länge L . Wir wollen uns auf den Spezialfall einer laminaren, inkompressiblen, stationären Newtonschen Flüssigkeit mit Viskosität η beschränken. Zusätzlich sollen Gravitationskraft und andere externe Kräfte vernachlässigt werden.

- (a) Die Navier-Stokes-Gleichungen mit den oben angegebenen Voraussetzungen lautet

$$\nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{v} .$$

Bestimmen Sie das Druckfeld $p(z)$ und das Geschwindigkeitsfeld $v_z(r)$. Verwenden Sie haftende Randbedingungen für v_z und eine gegebene Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$.

Hinweis: Beachten Sie, dass das Geschwindigkeitsfeld einer realen Flüssigkeit an keinem Ort divergieren darf!

- (b) Berechnen Sie die Ausflussmenge Q pro Zeiteinheit:

$$Q = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} ,$$

und zeigen Sie, dass $Q \propto R^4$ (Hagen-Poiseuillesches Gesetz).

S Aufgabe 20 (2 Punkte): Milch als Suspension

- (a) Wir betrachten einen Behälter voller Milch mit der Höhe $h = 25$ cm. Homogenisierte Milch ist im Wesentlichen eine Suspension aus Fetttröpfchen mit einem Durchmesser von ungefähr $1 \mu\text{m}$ in Wasser. Die Massendichte von Butterfett ist $0,91 \text{ g cm}^{-3}$. Welches Konzentrationsverhältnis $c(h)/c(0)$ der Fetttröpfchen oben und unten im Behälter stellt sich im Gleichgewicht bei Raumtemperatur ein? Ist homogenisierte Milch eine kolloidale Suspension im Gleichgewicht?

- (b) Nach Teil a) sollte sich Milch in Wasser und Fett trennen, was allerdings im Alltag nicht beobachtet wird. Verwenden Sie die Stokes-Formel für die viskose Reibung um abzuschätzen, wie schnell diese Separation in homogenisierter Milch abläuft. Vergleichen Sie die Situation mit unbehandelter Milch, wo die Fetttröpfchen einen Durchmesser von ungefähr $5 \mu\text{m}$ haben. (Die Viskosität von Wasser ist ungefähr $10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$.)