Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 3. Dezember 2013
http://www.tu-berlin.de/?137713

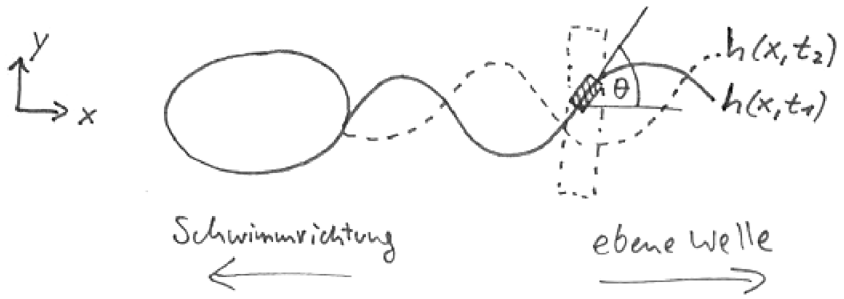
Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

8. Übungsblatt – Biologische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 11.12.2013 in der Übung

M **Aufgabe 25**: *Geschwindigkeit eines Spermiums*

In dieser Aufgabe soll die Geschwindigkeit eines Spermius abgeschätzt werden.



(a) Das fadenförmige Filament der Länge L des Spermiums deformiere sich gemäß

$$h(x,t) = b\sin(kx - \omega t)\ .$$

Aufgrund dieser nach rechts laufenden ebene Welle, schiebt das Spermium Flüssigkeit nach rechts und schwimmt nach links. Das Filament stellen wir uns vor als eine Ansammlung aneinander gereihter Stäbe, die nach oben und unten durch die Flüssigkeit gezogen werden, d.h. $\mathbf{v} = v_y \mathbf{e}_y$ (siehe Skizze). Für die Antriebskraftdichte $\mathbf{f}$ gilt für den Fall kleiner Reynoldszahlen $\mathbf{f} = \gamma \mathbf{v}$.

Berechnen Sie die Antriebskraftdichte f_x parallel zur Schwimmrichtung. Bestimmen Sie dazu die Reibungsmatrix $\gamma(\theta) = \mathbf{R}^T(\theta)\gamma_0\mathbf{R}(\theta)$ eines Stabes, der den Winkel θ zur x-Achse hat.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma_{||} & 0 \\ 0 & \gamma_\perp \end{pmatrix}$$

ist dabei die Reibungsmatrix eines Stabes, der parallel zur x-Achse ausgerichtet ist. Drücken Sie ferner v und θ durch h aus. Nehmen Sie dabei an, dass der Winkel θ klein ist ($\sin\theta \approx \theta$).

(b) Berechnen Sie die Antriebskraft $F_x = \int_0^L f_x dx$.

(c) Berechnen Sie die über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gemittelte Antriebskraft $\langle F_x \rangle = T^{-1}\int_0^T F_x dt$.

(d) Stellen Sie ein Kräftegleichgewicht auf, aus der mittleren Antriebskraft und der Reibungskraft des Spermiums (approximieren Sie dazu das Spermium als Stab der Länge L). Zeigen Sie, dass für die mittlere Geschwindigkeit des Spermius gilt:

$$\langle u \rangle = -\frac{\gamma_\perp - \gamma_{||}}{2\gamma_{||}}\omega k b^2\ .$$

S **Aufgabe 26 (5 Punkte):** *Energiefluktuationen im abgeschlossenen System*
Zwei nach außen abgeschlossene Systeme seien im thermischen Kontakt miteinander. Zeigen Sie, dass die relativen Fluktuationen der inneren Energie zwischen den beiden Systemen im thermodynamischen Limes (Teilchenzahl $N \to \infty$) verschwinden:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\Delta E}{E} = 0 \; .$$

Dabei seien die beiden Systeme physikalisch identisch und ihre Gesamtenergie ist $E = E_1 + E_2$. Es ist offensichtlich $\langle E_1 \rangle = \langle E_2 \rangle = E/2$.

(a) Entwicklen Sie die Gesamtentropie $S = S_1 + S_2$ nach $\Delta E = E_1 - E/2$ (so weit wie nötig). Wie muss sich der Entwicklungskoeffizient zweiter Ordnung in Abhängigkeit von der Teilchenzahl N verhalten? (Hinweis: S ist eine extensive Größe und damit eine homogene Funktion 1. Grades)

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Boltzmann'schen Definition der Entropie die Wahrscheinlichkeit, dass System 1 die Energie E_1 (und System 2 die Energie $E_2 = E - E_1$) aufweist. Zeigen Sie, dass für die relativen Fluktuationen

$$\frac{\Delta E}{E} \propto \frac{1}{N^\alpha} \; ,$$

gilt. Welchen Wert hat α?

S **Aufgabe 27 (5 Punkte):** *Entropiezunahme durch Diffusion*
Ist das Konzentrationsprofil einer Lösung in einem abgeschlossenen Behälter nicht homogen, dann ist die Entropie des Systems nicht maximal und damit auch die freie Energie nicht im Minimum. Folglich wird diese „Ordnung" durch Diffusion beseitigt werden und sich letztlich ein homogenes Profil einstellen.
Für die Entropiedichte $s = S/V$ verdünnter Lösungen gilt dieselbe Beziehung wie für ein ideales Gas,

$$s = k_B c \ln \frac{c}{c^*} \; .$$

(a) Wie lautet dann allgemein die Gesamtentropie $S(t)$ einer verdünnten Lösung mit inhomogenem Konzentrationsprofil $c(\mathbf{r}, t)$?

(b) Was ergibt sich dann letztlich für das Vorzeichen von $\frac{dS(t)}{dt}$? Nehmen Sie hierzu an, dass das Konzentrationsprofil nur in x-Richtung inhomogen ist, d. h. $c(\mathbf{r}, t) = c(x, t)$. Hinweis: Verwenden Sie die Diffusionsgleichung.