Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

9. Übungsblatt – Biologische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 18.12.2013 in der Übung

S Aufgabe 28 (10 Punkte): *Entropie und chemisches Potential des idealen Gases*

(a) Sei $\Omega(U)$ die Anzahl der Mikrozustände mit Energie U für ein Gas N nicht wechselwirkender Teilchen im Volumen V. Zeigen Sie, dass für die Entropie des idealen Gases die Sackur-Tetrode-Formel gilt:

$$S(U) = k_B \ln \Omega(U) = N k_B \left(\ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m U}{3 N h^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} \right) .$$

Hinweis 1: Die Oberfläche einer Hypersphäre in Dimension d mit Radius r ist:

$$A_d(r) = \frac{2\pi^{d/2}}{(\frac{d}{2}-1)!} r^{d-1} .$$

Hinweis 2: Verwenden Sie die Stirling Formel: $\ln N! \approx N \ln N - N$ bzw. $N! \approx N^N \mathrm{e}^{-N}$.

(b) Leiten Sie die thermische Zustandsgleichung sowie die kalorische Zustandsgleichung (Gleichverteilungssatz) des idealen Gases her.

Die Sackur-Tetrode-Formel gilt näherungsweise auch für verdünnte Lösungen. Es ist dabei zu beachten, dass es sich bei U nur um **kinetische** Energie handelt.
Wir betrachten nun den Fall, dass die Teilchenzahl nicht konstant ist (z. B. auf Grund chemischer Reaktionen) und dass jedes der N Teilchen noch eine zusätzliche innere Energie ϵ besitzt. Für das chemische Potential

$$\mu = -T \left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{U_{ges}, V}$$

ist entscheidend, dass die **Gesamt**energie U_{ges} festgehalten wird, die den Beitrag $N\epsilon$ der inneren Energien aller Teilchen einschließt.

(c) Bestimmen Sie das chemische Potential μ des Systems in Abhängigkeit von der Konzentration $c = N/V$ und der Temperatur T. Hinweis: Das Ergebnis besitzt die Form

$$\mu(c, T) = kT \ln c/c_0 + \mu_0(T) ,$$

wobei c_0 eine frei definierbare Referenzkonzentration ist. Welche Bedeutung hat $\mu_0(T)$?
Hinweis: Fassen Sie die kinetische Energie als Funktion der Gesamtenergie und der Teilchenzahlenergie auf.

M **Aufgabe 29**: *Poisson-Boltzmann → Gouy-Chapman*
Wir betrachten eine unendlich ausgedehnte Platte, die mit der Flächenladungsdichte σ elektrisch geladen ist. Vor der Platte befinde sich eine Elektrolyt-Lösung mit positiven und negativen Ionen, deren Konzentration im Unendlichen c_∞ sei. Nach der Poisson-Boltzmann-Theorie ist das elektrostatische Potential im Abstand x von der Platte durch

$$\bar{V}(x) \equiv \frac{eV(x)}{kT} = -2\ln\frac{1+\mathrm{e}^{-(x+x_*)/\lambda_D}}{1-\mathrm{e}^{-(x+x_*)/\lambda_D}}$$

gegeben, wobei

$$\mathrm{e}^{x_*/\lambda_D} = \frac{e}{2\pi l_B\lambda_D\sigma}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{2\pi l_B\lambda_D\sigma}{e}\right)^2}\right).$$

Hierbei ist $l_B = e^2/4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}kT$ die Bjerrum-Länge und $\lambda_D = (8\pi l_B c_\infty)^{-1/2}$ die Debye-Länge.
Der Effekt von hinzugefügtem Salz ist, dass es bei Abständen größer als die Debye-Länge die Ladung der Platte abschirmt. Für Abstände kleiner als λ_D macht sich das Salz hingegen kaum bemerkbar, so dass sich in dem Fall das Gouy-Chapman-Resultat ergeben sollte.

(a) Zeigen Sie, dass bei hinreichend kleiner Salzkonzentration, also hinreichend großem λ_D

$$\mathrm{e}^{x_*/\lambda_D} \approx 1 - \frac{x_0}{\lambda_D}\,, \quad \text{wobei} \quad x_0 = e/2\pi l_B\sigma$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass das Potential $\bar{V}(x)$ damit in das Gouy-Chapman-Resultat (plus eine Konstante) übergeht:

$$\bar{V}(x) = 2\ln\left(1+\frac{x}{x_0}\right) + \mathrm{const}\,.$$

M **Aufgabe 30**: *Ladungsdichte zwischen schwach geladenen Platten*
Wir betrachten zwei unendlich ausgedehnte, gleich geladene Platten (Flächenladungsdichte σ). Der Zwischenraum sei mit Gegenionen gefüllt. Zeigen Sie, dass für schwach geladene Platten die Dichte der Gegenionen im Zwischenraum als konstant angesehen werden kann ($c_+(x) = c_0$) und dass die Ladung der Gegenionen gerade die Ladung auf den Platten neutralisiert.