Prof. Dr. Sabine Klapp
Mathias Hayn, Maria Zeitz, Christian Fräßdorf, Hagen-Henrik Kowalski, Kilian Kuhla

5. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Mo. 25. 11. 2013 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

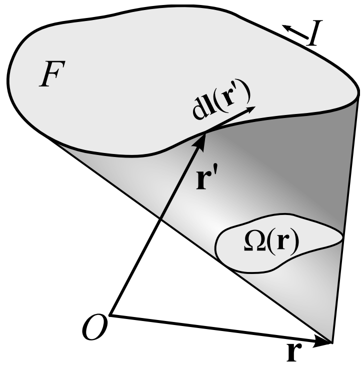
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!

Aufgabe 13 (2+2+2+2=8 Punkte): *Biot-Savart-Gesetz*

(a) Zeigen Sie mithilfe des Stokes'schen Integralsatzes die Gültigkeit von $\int_F (\mathrm{d}\mathbf{F}\times\nabla)\times\mathbf{A} = \oint_{\partial F}\mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{A}$ für ein Vektorfeld $\mathbf{A}$. Hier ist F eine Oberfläche mit dem Rand ∂F.
Hinweis: Das Feld $\mathbf{c}\times\mathbf{A}(\mathbf{r})$ im Stokes'schen Integralsatz könnte hilfreich sein.

(b) Durch eine beliebig geformte Leiterschleife, welche die Fläche F umschließe, fließe der konstante Strom I. Benutzen Sie das Biot-Savart'sche Gesetz,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{\partial F}\mathrm{d}\mathbf{l}(\mathbf{r}')\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{1}$$



und Aufgabenteil (a), um das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ am Ort $\mathbf{r}$ zu berechnen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}),\ \text{mit}\ \Phi(\mathbf{r}) = \Lambda\,\Omega(\mathbf{r}). \tag{2}$$

Bestimmen Sie Λ! Hier ist $\Omega(\mathbf{r})$ der am Punkt $\mathbf{r}$ von der Fläche F der Leiterschleife aufgespannte Raumwinkel

$$\Omega(\mathbf{r}) = \int_F \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{3}$$

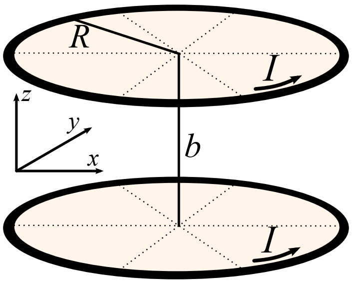
(c) Zeigen Sie, dass $\int_F \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$ in der Tat den Raumwinkel Ω ergibt.

(d) Benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) um das Magnetfeld auf der z-Achse zu berechnen, welches durch eine in der x-y-Ebene liegende kreisförmige Leiterschleife mit dem Radius R erzeugt wird:

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\mathbf{e}_z. \tag{4}$$

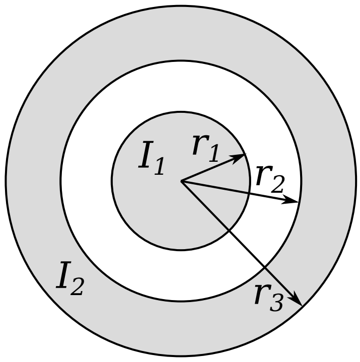
Aufgabe 14 (4 Punkte): *Stromschleifen*

Zwei identische, jeweils einen Strom I tragende, kreisförmige Stromschleifen mit den Radien R seien im Abstand b in z-Richtung parallel zueinander aufgestellt. Berechnen Sie das Magnetfeld in der Nähe der Mitte der beiden Schleifen (im Koordinatenursprung) als Entwicklung in Potenzen von z bis einschließlich zur Ordnung z^4. Bei welchem Abstand b ist das Magnetfeld nahezu homogen? Wie groß darf dann das maximale Verhältnis z/R sein, wenn die relative Abweichung des Magnetfelds $B(z)$ zum Wert $B(0)$ weniger als 10^{-2}, bzw. 10^{-4} betragen soll?



Aufgabe 15 (3,5+1,5=5 Punkte): *Koaxialkabel*

Der Kern sowie der Mantel eines Koaxialkabels werden in entgegengesetzter Richtung von den Strömen I_1 und I_2 durchflossen. Das Bild zeigt einen Querschnitt des Kabels, die Ströme fließen also in die Blattebene hinein bzw. aus ihr hinaus.



(a) Bestimmen Sie das Magnetfeld $B(r)$ in Abhängigkeit vom Achsenabstand r. Die Stromdichten j seien jeweils homogen auf dem Querschnitt verteilt. Skizzieren Sie den Feldverlauf für (i) $I_1 > 0$ und $I_2 = 0$ und (ii) $I_1 = 0$ und $I_2 < 0$.

(b) Was passiert für den Spezialfall $I_1 = -I_2$? Fertigen Sie auch hierzu eine Skizze an.