Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 22.11.2013

Prof. Dr. Sabine Klapp
Mathias Hayn, Maria Zeitz, Christian Fräßdorf, Hagen-Henrik Kowalski, Kilian Kuhla

6. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Mo. 02. 12. 2013 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

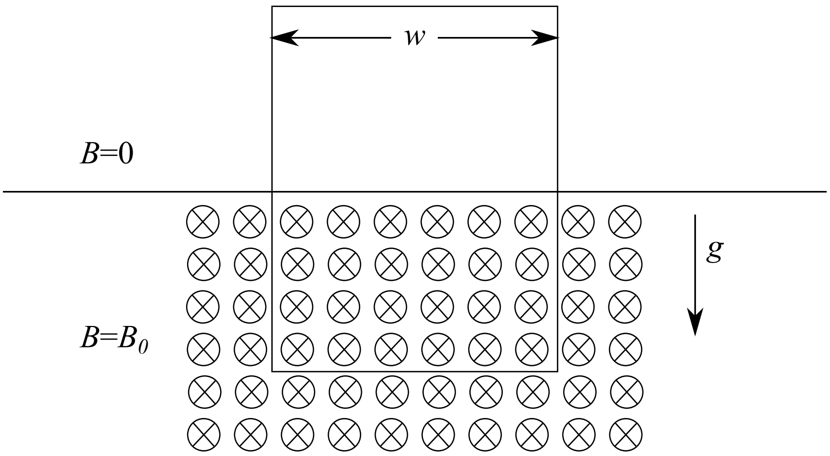
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!

Aufgabe 16 (3+3=6 Punkte): *Fallende Leiterschleife*

Eine rechteckige Leiterschleife mit den Seiten l und w wird zum Zeitpunkt $t = 0$ über eine Region mit einem konstanten Magnetfeld $B = B_0$ losgelassen. Dabei steht das Magnetfeld senkrecht zur Ebene der Schleife und zeigt in die Ebene hinein. Die Leiterschleife hat den Widerstand R, die Selbstinduktivität L und die Masse m. Betrachten Sie die Leiterschleife in der Zeit während sich die obere Kante noch im feldfreien Raum befindet.

(a) Nehmen Sie an, dass die Selbstinduktivität L vernachlässigt werden kann, nicht aber der Widerstand R. Bestimmen Sie Strom und Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.

(b) Nehmen Sie an, dass der Widerstand vernachlässigt werden kann, nicht aber die Selbstinduktivität L. Bestimmen Sie auch für diesen Fall Geschwindigkeit und Strom als Funktion der Zeit. Vernachlässigen Sie in beiden Fällen den Luftwiderstand.



Aufgabe 17 (1+2+1=4 Punkte): *Der bewegte Plattenkondensator*

Ein (unendlich) großer, planparalleler Plattenkondensator mit homogener Flächenladungsdichte σ auf der oberen und $-\sigma$ auf der unteren Platte bewegt sich mit Geschwindigkeit v entlang der Platten.

(a) Bestimmen Sie das magnetische Feld im Kondensator und außerhalb.

(b) Bestimmen Sie nun die magnetische Kraft pro Flächeneinheit auf der oberen Platte. In welche Richung wirkt die Kraft?

(c) Bei welchem v würde die magnetische die elektrische Kraft ausgleichen? Macht eine solche Geschwindigkeit Sinn?

Aufgabe 18 (5+1+1+2=9 Punkte): *Hyperfeinstruktur*

(a) Betrachten Sie eine beliebige auf einen Raumbereich um den Ursprung begrenzte Stromverteilung $\mathbf{j}$, welche ein Magnetfeld $\mathbf{B}$ erzeugt. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\mathcal{B}(R)} \mathrm{d}^3r\, \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{8\pi}{3}\mathbf{m} \tag{1}$$

gilt, wobei hier über eine Kugel im Ursprung vom Radius R integriert wird, welche die Stromverteilung $\mathbf{j}$ vollkommen einschließt. Auf der rechten Seite ist $\mathbf{m}$ das magnetische Moment der Stromverteilung $\mathbf{j}$. Um das Integral in (1) zu berechnen, zeigen Sie zunächst folgende Relationen:

(i) $\int_V \mathrm{d}^3r\, \nabla \times \mathbf{A} = \oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{F} \times \mathbf{A}$,

(ii) $\oint_{\partial\mathcal{B}(R)} \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{r})\, \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{4\pi}{3}\mathbf{r}'$. Integriert wird hier über eine Kugeloberfläche vom Radius R, mit $r' < R$.

Hinweise: Für (i) könnte der Satz von Gauss nützlich sein. Für (ii) verwenden Sie die Entwicklung des Bruchs nach Legendre-Polynomen: $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\cos\vartheta)$. Dabei ist ϑ der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$, und $r_< = \min(r, r')$, $r_> = \max(r, r')$. Denken Sie außerdem daran, dass die Legendre-Polynome *orthogonal* sind, $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell,\ell'}$.

(b) Im Tutorium wird gezeigt, dass der Winkelanteil des obigen Integrals (1) für ein reines Dipolfeld Null ergibt und damit das gesamte Integral verschwindet. Wie muss man das Dipolfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[3\frac{(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\right]$ modifizieren, so dass Gleichung (1) trotzdem erfüllt ist?

(c) Verwenden Sie das Resultat aus Aufgabenteil (b) um zu zeigen, dass das Wechselwirkungspotential zweier magnetischer Dipole $\mathbf{m}_1$ und $\mathbf{m}_2$ den Term

$$U_c(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{8\pi}{3}\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2\, \delta(\mathbf{r}) \tag{2}$$

enthält.

(d) Die Wechselwirkungsenergie U_c in Gleichung (2) führt z.B. beim Wasserstoffatom dazu, dass, je nachdem ob die magnetischen Momente des Kerns und des Elektrons parallel oder antiparallel ausgerichtet sind, die Grundzustandsenergie verschiedene Werte annimmt. Berechnen Sie diese Aufspaltung der Grundzustandsenergie, indem Sie zunächst den Erwartungswert von $U_c(\mathbf{r})$ im 1s-Orbital

$$\psi_{100}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}\, \mathrm{e}^{-r/a_0} \tag{3}$$

berechnen. Ersetzen Sie dann die magnetischen Momente von Elektron und Proton durch die jeweiligen Spins mittels $\mathbf{m}_1 = -2\frac{e}{2m_e}\mathbf{S}_e$ und $\mathbf{m}_2 = 5.59\frac{e}{2m_p}\mathbf{S}_p$. In der Quantenmechanik kann das Produkt $\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{S}_p$ die Werte $+\frac{1}{4}\hbar^2$ (Momente antiparallel) und $-\frac{3}{4}\hbar^2$ (Momente parallel) annehmen. Hier ist a_0 der Bohr'sche Radius, e ist die Elementarladung und m_e (m_p) ist die Masse des Elektrons (Protons). Geben Sie Ihr Ergebnis für die Energieaufspaltung in eV an und zeigen Sie, dass dies einer Wellenlänge von 21cm entspricht.