Prof. Dr. Sabine Klapp
Mathias Hayn, Maria Zeitz, Christian Fräßdorf, Hagen-Henrik Kowalski, Kilian Kuhla

8. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Mo. 16. 12. 2013 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!

Aufgabe 22 (2+3+1+4+2=12 Punkte): *Eigenschwingungen des EM-Feldes*

In dieser Aufgabe untersuchen wir ein freies elektromagnetisches Feld in einem ladungs- und stromfreien, würfelförmigen Volumen V (Kantenlänge L).

(a) Wir betrachten zunächst das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ in der Coulomb-Eichung. Dieses lässt sich in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \text{ mit } \mathbf{k} = 2\pi\Big(\frac{n_x}{L}, \frac{n_y}{L}, \frac{n_z}{L}\Big)^T, \ n_m \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Welchen zwei Bedingungen unterliegen die Fourier-Koeffiziente $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$, damit $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ in der Tat ein Vektorpotential in der Coulomb-Eichung darstellt?

(b) Lösen Sie mithilfe der Fourier-Darstellung aus (a) die Bewegungsgleichung für $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ und zeigen Sie, dass die Lösung von der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k}} \Big[\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\, f_k(t) + \mathbf{b}_{\mathbf{k}}\, g_k(t)\Big]\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{2}$$

ist. Sind $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ und $\mathbf{b}_{\mathbf{k}}$ unabhängig voneinander?

(c) Berechnen Sie das transversale **E**- und **B**-Feld. Zur Erinnerung: In der Coulomb-Eichung ist $\mathbf{E}_{\text{trans}}(\mathbf{r},t) = -\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}_{\text{trans}}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$.

(d) Berechnen Sie den von den transversalen **E**- und **B**-Feldern herrührenden Anteil der elektromagnetischen Feldenergie $U = \int_V w(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}^3r$. Hier ist $w(\mathbf{r},t)$ die aus der Vorlesung bekannte Energiedichte des elektromagnetischen Feldes. Zeigen Sie, dass diese die einfache Form

$$U = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}, \quad u_{\mathbf{k}} = 2V\varepsilon_0\, c^2 k^2\, \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \tag{3}$$

annimmt. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

(e) Nun führen wir neue „kanonische Variablen" $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ und $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ über

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}(t) = \sqrt{V\varepsilon_0}\Big(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-i\omega_k t} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{i\omega_k t}\Big) \tag{4}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}}(t) = -ick\sqrt{V\varepsilon_0}\Big(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-i\omega_k t} - \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{i\omega_k t}\Big). \tag{5}$$

ein. Mit der Dispersionsrelation $\omega_k = ck$. Drücken Sie die elektromagnetische Feldenergie aus Aufgabenteil (d) durch diese neuen Variablen aus. Das Ergebnis wollen wir als die *Hamilton-Funktion* $\mathcal{H}(\{\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}, \mathbf{P}_{\mathbf{k}}\})$ des EM-Feldes bezeichnen. Stellen Sie schließlich die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf und interpretieren Sie diese.

Aufgabe 23 (3+3=6 Punkte): *Polarisierte Welle*
Eine transversale elektromagnetische Welle in einem nichtleitenden, ungeladenen Medium sei

(a) linear polarisiert
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(kz - \omega t), \tag{6}$$

(b) zirkular polarisiert
$$\mathbf{E} = E_0 \left[\cos(kz - \omega t)\mathbf{e}_x + \sin(kz - \omega t)\mathbf{e}_y\right] \tag{7}$$

und breite sich in z-Richtung aus. Berechnen sie

(i) die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$,

(ii) den Poynting-Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$

(iii) und den Strahlungsdruck auf eine um den Winkel θ gegen die Ausbreitungsrichtung geneigte total absorbierende Ebene.