Prof. Dr. Sabine Klapp
Mathias Hayn, Maria Zeitz, Christian Fräßdorf, Hagen-Henrik Kowalski, Kilian Kuhla

10. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Montag, 13. 1. 2014 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!

Aufgabe 25 (1+2+4+3=10 Punkte): *Dipolantenne*

Entlang einer Raumrichtung, welche durch den Vektor $\mathbf{n}$ gegeben ist, befinden sich (jeweils im Abstand ℓ) $2(N+1)$ oszillierende Dipole. Die Zeitabhängigkeit sei wie in der Vorlesung harmonisch mit der Frequenz ω. In Analogie zur Vorlesung ist das $\mathbf{B}$-Feld für große Abstände näherungsweise durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi c}\omega^2\,\mathbf{p}_0 \times \mathbf{e}_r \sum_{m=-N}^{N} \frac{\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|}\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{1}$$

gegeben. Hier ist $\mathbf{p}_0$ das statische Dipolmoment und $\mathbf{r}_m = m\,\ell\,\mathbf{n}$ gibt die Positionen der $2(N+1)$ Dipole an.

(a) Zeigen Sie, dass man in der Fernzone das $\mathbf{B}$-Feld durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \approx \mathbf{B}_1(\mathbf{r},t) \sum_{m=-N}^{N} \mathrm{e}^{-ik\ell m \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{n}}, \tag{2}$$

nähern kann. Dabei ist $\mathbf{B}_1(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c}\omega^2\,\mathbf{p}_0 \times \mathbf{e}_r \frac{\exp(ikr)}{r}\exp(-i\omega t)$ das $\mathbf{B}$-Feld *eines* Dipols in der Fernzone.

(b) Berechnen Sie schließlich die Summe in Gl. (2):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \approx \mathbf{B}_1(\mathbf{r},t)\frac{\sin[\frac{1}{2}(2N+1)k\ell\,\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{n}]}{\sin[\frac{1}{2}k\ell\,\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{n}]}. \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass für $\mathbf{E}$- und $\mathbf{B}$-Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit die Relation

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = i\frac{c}{k}\nabla\times\mathbf{B} \tag{4}$$

gilt. Leiten Sie damit explizit für das $\mathbf{B}$-Feld aus Gl. (3) die Formel $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \approx c\,\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{e}_r$ in der Fernzone her.

(d) Bestimmen Sie nun den (zeitgemittelten) Poynting-Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)^*$ und die in den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ abgestrahlte Leistung $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = r^2\,\mathbf{S}\cdot\mathrm{e}_r$. In welche Richtung ist die abgestrahlte Leistung maximal? Visualisieren Sie für verschiedene N die abgestrahlte Leistung für den Fall, dass der Abstand der Dipole genau halb so groß wie die Wellenlänge der Strahlung ist.

Aufgabe 26 (2+5=7 Punkte): *Liénard-Wiechert Potentiale*
Im Tutorium werden aus den bekannten retardierten Potentialen die sogenannten Liénard-Wiechert Potentiale für eine bewegte Punktladung mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}$ hergeleitet:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{|\mathbf{R}|c - \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{r}}_0(t_r)}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qc\,\dot{\mathbf{r}}_0(t_r)}{|\mathbf{R}|c - \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{r}}_0(t_r)} \tag{5}$$

wobei $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)$ ist und die Zeit t_r der retardierten Zeit entspricht und implizit durch

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)| = c\,(t - t_r) \tag{6}$$

gegeben ist.
Bestimmen Sie das retardierte Potential einer Punktladung, die sich mit konstanter Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}$ bewegt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Geben Sie $\mathbf{r}_0(t)$ an und berechnen sie die Zeit t_r aus der impliziten Gleichung (6). Dabei ist eine quadratische Gleichung zu lösen. Behalten Sie hier nur die Lösung, die die Kausalität erfüllt. *Hinweis*: Setzen Sie zum Test $\mathbf{v} = 0$ ein.

(b) Zeigen Sie, dass sich damit die Potentiale schreiben lassen als

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}}{w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}},$$

wobei $\mathbf{w} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ der Abstandsvektor vom *gegenwärtigen* Ort des Teilchens zum Beobachter, $w = |\mathbf{w}|$ und θ der Winkel zwischen $\mathbf{w}$ und $\mathbf{v}$ ist.

Was folgt für nicht-relativistische Geschwindigkeiten $\mathbf{v}$?

Aufgabe 27 (2+1+3=6 Punkte): *Magnetisierte Kugel*
Betrachten Sie eine in z-Richtung homogen magnetisierte Kugel mit dem Radius R. Die Stärke der makroskopischen Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ sei M_0.

(a) Der vom Magnetisierungsstrom stammende Anteil des Vektorpotentials lässt sich schreiben als,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}M_0\,\mathbf{e}_z \times \oint_{\partial\mathcal{B}(R)} \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{r}')\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{7}$$

Zeigen Sie dies! Integriert wird hier über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R.

(b) Benutzen und erweitern Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 18 um das in Gl. (7) auftretende Integral explizit auszurechnen und für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{3}M_0\,\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}\begin{cases} 1, & r < R \\ \left(\frac{R}{r}\right)^3, & r > R \end{cases} \tag{8}$$

zu erhalten.

(c) Berechnen und skizzieren Sie schließlich das $\mathbf{B}$- und $\mathbf{H}$-Feld. *Hinweis:* Benutzen Sie die Ergebnisse der Aufgabe 1.