Prof. Dr. Sabine Klapp
Mathias Hayn, Maria Zeitz, Christian Fräßdorf, Hagen-Henrik Kowalski, Kilian Kuhla

11. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Montag, 20. 1. 2014 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!

Aufgabe 28 (2+1+1+8+2=14 Punkte): *Dielektrische Kugel*
In dieser Aufgabe soll das elektrische Feld einer ungeladenen Kugel mit Radius R und der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_1 > 0$ berechnet werden, welche in eine ungeladene dielektrische Flüssigkeit mit einer Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_2 > 0$ gebracht wird. Außerdem sei ein externes homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E}_0 = E_0\,\mathbf{e}_z$ angelegt.

(a) Bevor Sie sich dem obigen Problem widmen, untersuchen Sie zunächst die Lösungen der Laplace-Gleichung in sphärischer Geometrie. Betrachten Sie die Laplace-Gleichung für das Potential $\Phi(\mathbf{r})$ in Kugelkoordinaten $[\mathbf{r} = r(\sin\vartheta\,\cos\varphi, \sin\vartheta\,\sin\varphi, \cos\vartheta)^T]$ und zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung durch

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} R_\ell(r)\,Q_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) \tag{1}$$

gegeben ist. Geben Sie die Funktionen $R_\ell(r)$ und $Q_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$ an. *Hinweis:* Verwenden Sie einen Separationsansatz. *Bemerkung:* Aus der Quantenmechanik-Vorlesung (oder aus anderen Quellen) wissen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen Eigenfunktionen des Winkelanteils des Laplace-Operators sind.

(b) Spezialisieren Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe (a) für den Fall einer Axialsymmetrie bzgl. der z-Achse.

(c) Zeigen Sie, dass die Komponenten des elektrischen Feldes $\mathbf{E} = E_r\,\mathbf{e}_r + E_\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta + E_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$ dann durch

$$E_r = -\sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+1)\Big[a_{\ell+1}\,r^\ell\,P_{\ell+1}(\cos\vartheta) - b_\ell\,r^{-(\ell+2)}\,P_\ell(\cos\vartheta)\Big], \tag{2}$$

$$E_\vartheta = \sum_{\ell=0}^{\infty}\Big[a_{\ell+1}\,r^\ell + b_{\ell+1}\,r^{-(\ell+3)}\Big]\sin\vartheta\,P'_{\ell+1}(\cos\vartheta), \tag{3}$$

$$E_\varphi = 0 \tag{4}$$

gegeben sind. Hier sind $P_\ell(x)$ die wohlbekannten Legendre-Polynome und $P'_\ell(x)$ bezeichnet deren Ableitung.

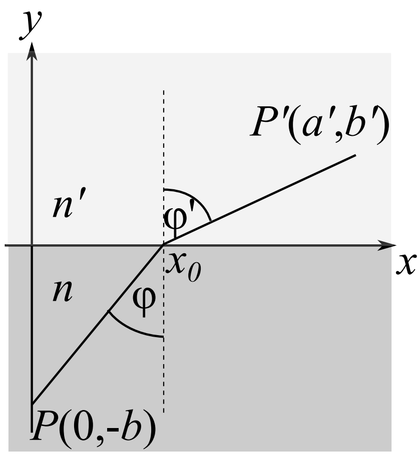
(d) Benutzen Sie nun Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil (c), um das elektrische Feld in dem eingangs beschriebenen System einer dielektrischen Kugel in einem Dielektrikum mit einem externen Feld zu berechnen:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{3\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2}\mathbf{E}_0 & , \quad r < R \\ \mathbf{E}_0 + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2}R^3\left[3\dfrac{(\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \dfrac{\mathbf{E}_0}{r^3}\right] & , \quad r > R \end{cases} \tag{5}$$

Hinweise: (*i*) Dadurch, dass es keine Punktladungen gibt, ist das **E**-Feld überall endlich. (*ii*) Für große Abstände ist zu erwarten, dass der Einfluss der dielektrischen Kugel auf das **E**-Feld zu vernachlässigen ist. (*iii*) Beachten Sie das Feldverhalten an der Grenzfläche $r = R$. (*iv*) Es gilt $\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)\,\mathrm{d}x = h_n\,\delta_{n,m}$. Dabei ist h_n eine von n abhängige Zahl (deren Wert uns hier nicht interessiert).

(e) Zeichnen Sie das **E**- und **D**-Feld einmal für $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ und einmal für $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Diskutieren das Verhalten im Grenzfall $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$.

Aufgabe 29 (3 Punkte): *Fermatsches Prinzip*



Das *Fermatsche Prinzip* besagt, dass Lichstrahlen zwischen zwei Punkten P und P' so laufen, dass der optische Weg ΔS minimal wird:

$$\Delta S = \int_P^{P'} |\,\mathrm{d}\mathbf{r}|n(\mathbf{r}) = \text{minimal}.$$

Leiten Sie hieraus das aus der Vorlesung bekannte Snellius'sche Brechungsgesetz ab.