Prof. Dr. Sabine Klapp
Mathias Hayn, Maria Zeitz, Christian Fräßdorf, Hagen-Henrik Kowalski, Kilian Kuhla

12. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Montag, 27. 1. 2014 bis 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!

Aufgabe 30 (3+3=6 Punkte): *Leitfähigkeit von Metallen*

Im Rahmen des Drude-Modells werden die Metallelektronen als klassische Teilchen der Masse m und Ladung e aufgefasst, die aneinander stoßen. Durch diese Stöße entsteht eine Reibungskraft, die sich im Widerstand zeigt. Die Häufigkeit der Stöße wird durch eine phänomenologische Stoßzeit τ beschrieben. Die Bewegungsgleichung für die Elektronen lautet

$$m\dot{\mathbf{v}} + \frac{m}{\tau}\mathbf{v} + e\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0.$$

Das elektrische Feld sei durch $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$ beschrieben.

(a) Berechnen Sie die Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$. Bestimmen Sie dazu zunächst die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ der Elektronen und die Stromdichte $\mathbf{j}$. Wie verhalten sich elektrisches Feld und Strom für sehr niedrige und sehr hohe Frequenzen zueinander?

(b) Leiten Sie die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon(\omega)$ her. Leiten Sie dazu aus dem Maxwellgleichungen und dem Ohm'schen Gesetz die "Wellengleichung"

$$-\Delta\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$$

her. Zeigen Sie, dass die Permittivität $\varepsilon(\omega)$ für hohe Frequenzen die Form $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{\mathrm{pl}}^2/\omega^2$ annimmt. Charakterisieren Sie die Lösungen für $\omega < \omega_{\mathrm{pl}}$ und $\omega > \omega_{\mathrm{pl}}$ qualitativ.

Aufgabe 31 (4+2+2+2=10 Punkte): *Fresnelsche Formeln*

In der Vorlesung wurden die Fresnelschen Formeln für Polarisation senkrecht zur Einfallsebene hergeleitet.

(a) Verwenden Sie die vektoriellen Stetigkeitsbedingungen der Vorlesung sowie das Gesetz von Snellius, um die folgenden Gleichungen für Amplitudenverhältnisse der einfallenden (E_0), reflektierten (E_0'') und transmittierten (E_0') ebenen Wellen für parallele Polarisierung (bzgl. der Einfallsebene) herzuleiten:

$$t_\parallel = \frac{E_0'}{E_0} = \frac{2nn'\cos\varphi}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos\varphi + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\varphi}},$$

$$r_\parallel = \frac{E_0''}{E_0} = \frac{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos\varphi - n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\varphi}}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos\varphi + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\varphi}}.$$

(b) Stellen Sie für $\mu = \mu'$ die Reflektivitäten $R_\parallel = |r_\parallel|^2$ und $R_\perp = |r_\perp|^2$ in Abhängigkeit vom Einfallswinkel φ grafisch dar. Verwenden Sie

(i) $n = 1, n' = 1,5$ Übergang Luft-Glas

(ii) $n = 1,5, n' = 1$ Übergang Glas-Luft.

(c) Zeigen Sie, dass für senkrechten Einfall die Transmittivitäten und die Reflektivitäten unabhängig davon sind, ob das Licht senkrecht oder parallel polarisiert ist.
Hinweis: Berechnen Sie hierfür die Amplitudenverhältnisse $t_\perp, t_\parallel, r_\perp$ und $, r_\parallel$.

(d) Betrachten Sie die Frequenzabhängigkeit der Reflektivität R bei senkrechter Bestrahlung einer Luft-Metall-Grenzfläche: Verwenden Sie $n_{\text{Luft}} = 1$, $\mu = \mu'$ und $\varepsilon_{\text{Metall}}(\omega) = 1 - \omega_{\text{pl}}^2/\omega^2$ (siehe Aufgabe 30). Zeigen Sie, dass dann

$$R(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \leq \omega_{\text{pl}} \\ \left(\frac{1-\sqrt{1-\omega_{\text{pl}}^2/\omega^2}}{1+\sqrt{1-\omega_{\text{pl}}^2/\omega^2}}\right)^2, & \text{für } \omega > \omega_{\text{pl}} \end{cases}$$

gilt. Plotten Sie $R(\omega)$ für $\omega = 0 \ldots 2\omega_{\text{pl}}$.