- **Rezept zur Berechnung der Bahnkurve aus der Hamilton-Jacobi-Gleichung**
  (am Beispiel ■ des harmonischen Oszillators)

1) Hamilton-Funktion $H(\underline{p},\underline{q},t)$ des betrachteten mechanischen Systems bestimmen

■ $H(p,q)=\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}q^2$, q –Auslenkung aus der Ruhelage

2) Hamilton-Jacobi-Gleichung $H\left(q,\frac{\partial S}{\partial \underline{q}},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$ aufstellen

■ $\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+\frac{k}{2}q^2+\frac{\partial S}{\partial t}=0$

und ihr <u>vollständiges Integral</u> $S(\underline{q},\underline{\alpha},t)$ mit f unbestimmten Konstanten $\underline{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_f\}$ (den „neuen" Impulsen $\underline{P}$) bestimmen, wobei wie bisher f die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet.

■ Im Fall des harmonischen Oszillators ist H nicht explizit zeitabhängig ("t zyklisch"), deshalb Separationsansatz $S(q,t)=W(q)+V(t)$. Dann folgt

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2+\frac{k}{2}q^2}_{\text{nur } q-\text{abhängig}}=\underbrace{-\frac{dV}{dt}}_{\text{nur } t-\text{abh.}}=\text{const}=:\alpha\quad(=E)$$

also

$$V(t)=-\alpha t+\text{const}'\ \text{ und }\ \frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2=\alpha-\frac{k}{2}q^2\geq 0,\ \text{d.h. } W(q,\alpha)=\sqrt{2m}\int dq\sqrt{\alpha-kq^2/2}$$

und insgesamt $\underline{S(q,\alpha,t)=\sqrt{2m}\int dq\sqrt{\alpha-kq^2/2}-\alpha t}$.

3) Setze $\frac{\partial S(\underline{q},\underline{\alpha},t)}{\partial\alpha_i}=\beta_i$ mit f weiteren unbestimmten Konstanten β_i (den „neuen Koordinaten“ $Q_i=\frac{\partial S}{\partial P_i}$) und löse nach q_i auf um $q_i(t;\underline{\alpha},\underline{\beta})$ zu erhalten.

■ Aus $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta$ folgt $\beta + t = S(q, \alpha, t) = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2\alpha}}\, q \right)$,

d.h. wie erwartet die harmonische Schwingung

$$q(t;\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \sin\left[\omega(\beta + t)\right]$$

mit Amplitude $\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}$, Phase $\omega\beta$ und Kreisfrequenz $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

4) Berechne die Zeitabhängigkeit der Impulse $p_i(t;\underline{\alpha},\underline{\beta})$ aus $p_i = \frac{\partial S(\underline{q},\underline{\alpha},t)}{\partial q_i}$ unter Verwendung von $q_i(t;\underline{\alpha},\underline{\beta})$ aus **3)**

$$p = \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q} = \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q} = \sqrt{2m}\sqrt{\alpha - kq^2/2} = \sqrt{2m}\sqrt{\alpha - \frac{k}{2}\frac{2\alpha}{k}\sin^2[\omega(\beta+t)]}$$

■

$$p(t;\alpha,\beta) = \sqrt{2m\alpha}\, \cos[\omega(\beta+t)]$$

5) Bestimme die 2f Konstanten $\underline{\alpha}$ und $\underline{\beta}$ aus den Anfangsbedingungen

■ Für $q(t=0) = A$ und $p(t=0) = 0$ ergibt sich beispielsweise

$$0 = p(t=0) = \sqrt{2m\alpha}\, \cos(\omega\beta) \quad \rightarrow \quad \omega\beta = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$$

$$A = q(t=0) = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \underbrace{\sin(\omega\beta)}_{1} \quad \rightarrow \quad \frac{kA^2}{2} = \alpha = E$$

Dass α die Schwingungsenergie ist, war bereits beim Separationsansatz unter Punkt 2) zu erkennen. Insgesamt haben wir

$$q(t) = A\sin(\omega t + \pi/2) = A\cos\omega t,\; p(t) = \sqrt{2m\frac{kA^2}{2}}\cos(\omega t + \pi/2) = -mA\omega\sin\omega t \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nur in die-}\\ \text{sem Fall}}}{=} m\frac{dq}{dt}$$

.

Einschub: Separation der Variablen zur Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung (L^2, § 48)

A: Hängt die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit ab, führt der Separationsansatz

$\underline{S(\underline{q},\underline{\alpha},t) = S_0(\underline{q},\underline{\alpha}) - E\,t}$ auf die Gleichung $\underline{H\left(\underline{q},\frac{\partial S_0}{\partial \underline{q}},\underline{\alpha}\right) = E}$.

B: Eine zyklische Variable, z.B. q_1, geht nicht in die Hamilton-Funktion, also auch nicht in die HJG ein. Sie wird über den Ansatz $\underline{S(\underline{q},\underline{\alpha},t) = S_0(q_2,q_3,\ldots,q_f,\underline{\alpha}) + \alpha_1 q_1}$ absepariert. Dann genügt S_0 im konservativen Fall der reduzierten Gleichung (f-1 Freiheitsgrade) $\underline{H\left(q_2,q_3,\ldots,q_f,\alpha_1,\frac{\partial S_0}{\partial q_2},\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S_0}{\partial q_f}\right) = E}$.

C: Separation der Variablen in einigen krummlinigen Koordinatensystemen (u.a. in sphärischen, parabolischen und elliptischen Koordinaten) möglich

■ Bewegung eines Massepunkts im Feld $U(r,\theta,\varphi) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}$ mit beliebigen Funktionen a(r), b(θ) und c(φ) ist vollständig separierbar. Wir wissen, dass die Hamilton-Funktion eines sich im Feld U(r, θ, φ) bewegenden Massepunkts bei Verwendung sphärischer Koordinaten

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(r,\theta,\varphi)$$

lautet. Im Fall $c(\varphi) = 0$ führt der Separationsansatz $S_0 = p_\varphi\,\varphi + S_1(r) + S_2(\theta)$ nach einfacher Rechnung auf

$$S = -E\,t + p_\varphi\,\varphi + \int dr\,\sqrt{2m\left[E - a(r)\right] - \frac{\beta}{r^2}} + \int d\theta\,\sqrt{\beta - 2m\,b(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}$$

mit den freien Konstanten p_φ, β und E. Die Ableitungen von S nach diesen Konstanten werden neuen Konstanten gleichgesetzt und so die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen ermittelt.

4. Raum-Zeit-Symmetrie und Erhaltungssätze. Noether-Theorem

Jede Invarianz der Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems gegenüber einer infinitesimalen Transformation der Koordinaten und/oder der Zeit (→ das bezeichnen wir als Symmetrie)

$$q_i \to \tilde{q}_i = q_i + \varepsilon \psi_i((\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + O(\varepsilon^2), \qquad t \to \tilde{t} = t + \varepsilon \varphi(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + O(\varepsilon^2) \tag{H}$$

ist mit einem Erhaltungssatz bzw. einem Integral der Bewegung $Q(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \text{const}$ für das betrachtete physikalische System verknüpft:

$$L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) \xrightarrow[t \to \tilde{t} = t + \varepsilon\varphi(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + O(\varepsilon^2)]{q_i \to \tilde{q}_i = q_i + \varepsilon\psi_i((\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + O(\varepsilon^2)} \tilde{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = L(\tilde{\underline{q}}, \dot{\tilde{\underline{q}}}, t)$$

Symmetrie von Raum-Zeit/ Invarianz von L, also $L = \tilde{L}$	$\Leftrightarrow$	Erhaltungssatz/ Integral der Bewegung

$L = \tilde{L}$ bedeutet, die betrachteten Transformationen lassen die Bewegungsgleichung invariant.

Bevor wir das Integral der Bewegung $Q(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \text{const}$ aus den Transformationsformeln $\psi_i(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$ und $\varphi(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$ berechnen, betrachten wir Beispiele für Symmetrietransformationen. Bei der Überprüfung der Relation $L = \tilde{L}$ legen wir ein MPS aus N MP mit der Lagrange-Funktion

$$L(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_N, \dot{\underline{r}}_1, \dot{\underline{r}}_2, \ldots, \dot{\underline{r}}_N, t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 - U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_N, t) =$$

$$= \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2}^{\text{kinetische Energie}} - \overbrace{\sum_{\substack{\alpha=1\\ i=1}}^{s,N} U_\alpha(\underline{r}_i, t)}^{\text{s äußere Felder}} - \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N} U_{ik}\left(\left|\underline{r}_i - \underline{r}_k\right|\right)}^{\substack{\text{Paarwechselwirkung mit}\\ \text{abstandsabhängigem Potenzial}}}$$

zugrunde. Neben der kinetischen Energie werden s äußere Felder U_α berücksichtigt; die Wechselwirkung zwischen den MP ist auf Paarwechselwirkungen mit abstandsabhängigem Potenzial U_{ik} beschränkt, was $\underline{F}_{ik} = -\underline{F}_{ki}$ sichert (vgl. Kap. 1.4.8).

A: Zunächst untersuchen wir, welchem Erhaltungssatz die Invarianz der Lagrange-Funktion gegenüber einer infinitesimalen Verschiebung aller N MP um einen infinitesimal kleinen, konstanten Vektor $d\underline{a}$ ($\rightarrow$ also einer Verschiebung des Koordinatenursprungs um $d\underline{a}$) entspricht. Die Transformationsformeln lauten in diesem Falle

$$\underline{\underline{r}_i \to \tilde{\underline{r}}_i = \underline{r}_i + d\underline{a}\,, \quad \dot{\underline{r}}_i \to \dot{\tilde{\underline{r}}}_i = \dot{\underline{r}}_i\,, \quad t \to \tilde{t} = t\,.} \qquad \text{(H1)}$$

Angenommen, es ist $L = \tilde{L}$. Dann gilt

$$0 = \tilde{L} - L = L(\underline{r}_i + d\underline{a}, \dot{\underline{r}}_i, t) - L(\underline{r}_i, \dot{\underline{r}}_i, t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} \cdot d\underline{a} + O\big((d\underline{a})^2\big) \underset{L\,II}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\right) \cdot d\underline{a} + O\big((d\underline{a})^2\big) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\underline{p}_i \cdot d\underline{a} + O\big((d\underline{a})^2\big),$$

wobei $\underline{p}_i$ der Impuls des i-ten MP ist. $d\underline{a}$ ist beliebig, d.h. es muss für $L = \tilde{L}$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\underline{p}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\underline{p}_i = \frac{d\underline{P}}{dt} = 0 \quad \text{also} \quad \underline{\sum_{i=1}^{N}\underline{p}_i = \underline{P} = \text{const}}$$

gelten.

17 12 14

Fazit: Wenn die Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems invariant unter der Transformation (H1) ist, wenn also alle Punkte des Raumes äquivalent sind (als Ursprung des KS dienen könnten), dann bleibt der Gesamtimpuls ($\rightarrow$ Schwerpunktimpuls) des betrachteten Systems erhalten:

Homogenität des Raumes $\Leftrightarrow$ **Impulserhaltung**

■ Im Fall des MPS aus N wechselwirkenden MP ist $L = \tilde{L}$ wegen $\underline{\tilde{r}}_i - \underline{\tilde{r}}_k = \underline{r}_i - \underline{r}_k$ und $\dot{\underline{\tilde{r}}}_i = \dot{\underline{r}}_i$ offensichtlich nur dann erfüllt, wenn es keine äußeren Felder U_α gibt. Diese vereiteln wegen $U_\alpha(\underline{r}_i + d\underline{a}, t) = U_\alpha(\underline{r}_i, t) + \underline{\nabla} U_\alpha \cdot d\underline{a} + O\big((d\underline{a})^2\big) \neq U_\alpha(\underline{r}_i, t)$ die Invarianz von L unter (H1), solange $\sum_{\alpha=1}^{s} \underline{F}_\alpha(\underline{r}_i) = -\sum_{\alpha=1}^{s} \underline{\nabla} U_\alpha(\underline{r}_i) \neq 0$.

Das bedeutet: Ist die resultierende äußere Kraft auf das MPS gleich Null (weil es, z.B., keine äußeren Felder gibt), bleibt der Gesamtimpuls erhalten und der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig, wie in Kap. 1.4.8 bereits bewiesen. (dort allerdings, ohne sich auf die Homogenität des Raumes in diesem Fall zu beziehen).

B: Welcher Erhaltungssatz entspricht der Invarianz der Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems gegenüber der Transformation

$$\underline{\underline{r}_i \to \underline{\tilde{r}}_i = \underline{r}_i\,, \quad \dot{\underline{r}}_i \to \dot{\underline{\tilde{r}}}_i = \dot{\underline{r}}_i\,, \quad t \to \tilde{t} = t + dt}\,, \qquad \text{(H2)}$$

also der Verschiebung des Zeitanfangs um dt?

Wenn $L = \tilde{L}$, dann ist $\tilde{L} - L = L(\ldots, t + dt) - L(\ldots, t) = \frac{\partial L}{\partial t} dt + O\big((dt)^2\big) = 0$, also $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

Wegen $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{dH}{dt}$ (vgl. Kap. 2.4, Sonderfall Energieerhaltung) impliziert $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$\underline{H = \text{const}}$.

Fazit: Wenn die Lagrange-Funktion invariant unter der Transformation (H2) ist, wenn also alle Zeitpunkte äquivalent sind, dann bleibt die Energie des betrachteten Systems erhalten:

Homogenität der Zeit ⇔ **Energieerhaltung**

■ Im Fall des MPS aus N wechselwirkenden MP ist $L = \tilde{L}$ bzw. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ nur dann erfüllt, wenn die potenzielle Energie nicht explizit zeitabhängig ist: $U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_N)$.

Noch einmal ausführlich:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i}\dot{\underline{r}}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\ddot{\underline{r}}_i\right)+\underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{0}=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\right)\dot{\underline{r}}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\ddot{\underline{r}}_i\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\dot{\underline{r}}_i\right).$$

Damit ist

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\dot{\underline{r}}_i-L\right)=0\,,\ \text{also}\ \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\dot{\underline{r}}_i-L=\text{const}\ ,\ \text{wenn}\ \frac{\partial L}{\partial t}=0\,.$$

Für das MPS haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}=m_i\dot{\underline{r}}_i\,,\ \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\dot{\underline{r}}_i=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\underline{r}}_i^2=2T\ ,\ \text{also}\ \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\dot{\underline{r}}_i-L=2T-(T-U)=T+U=E=\text{const}\,.$$

C: Welcher Erhaltungssatz entspricht der Invarianz der Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems gegenüber einer infinitesimalen Drehung um einen beliebigen, infinitesimal kleinen konstanten Winkel $\underline{d\varphi}$, also der Transformation

$$\underline{r}_i\ \to\ \tilde{\underline{r}}_i=\underline{r}_i+\underline{d\varphi}\times\underline{r}_i\ ,\quad \dot{\underline{r}}_i\ \to\ \dot{\tilde{\underline{r}}}_i=\dot{\underline{r}}_i+\underline{d\varphi}\times\dot{\underline{r}}_i\ ,\quad t\to\tilde{t}=t\,? \tag{H3}$$

Wir wissen: Bei Drehung um den Winkel $\underline{d\varphi}$ beruht $\underline{dr}_i=\underline{d\varphi}\times\underline{r}_i$ auf $|\underline{dr}_i|=dr_i=r_i\sin\vartheta\, d\varphi$ und darauf, dass $\underline{dr}_i$ senkrecht auf der durch $\underline{r}_i$ und $\underline{d\varphi}$ aufgespannten Ebene steht.

Wenn L invariant unter der Transformation (H3) bleibt, dann gilt

$$0=\tilde{L}-L=L(\underline{r}_i+\underline{d\varphi}\times\underline{r}_i,\dot{\underline{r}}_i+\underline{d\varphi}\times\dot{\underline{r}}_i,t)-L(\underline{r}_i,\dot{\underline{r}}_i,t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i}\cdot(\underline{d\varphi}\times\underline{r}_i)+\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\cdot(\underline{d\varphi}\times\dot{\underline{r}}_i)\right]+O\left((\underline{d\varphi})^2\right)\underset{\substack{\text{zyklische}\\ \text{Vertausch.}}}{\cong}\underline{d\varphi}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(\underline{r}_i\times\frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i}+\dot{\underline{r}}_i\times\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\right)=$$

$$=\underline{d\varphi}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\underline{r}_i\times\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\right)+\dot{\underline{r}}_i\times\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\right]=\underline{d\varphi}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\underline{r}_i\times\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\right)=\underline{d\varphi}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\underline{r}_i\times\underline{p}_i\right)=\underline{d\varphi}\cdot\frac{d\underline{\underline{L}}}{dt}.$$

Für beliebige $\underline{d\varphi}$ kann $\tilde{L} = L$ nur gelten, wenn

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{p}_i = \text{const}$$

ist (nicht Lagrange-Funktion L und Gesamtdrehimpuls $\underline{L}$ verwechseln !)

Fazit: Erweist sich die Lagrange-Funktion als invariant unter der Transformation (H3), d.h. gegenüber der Drehung des Koordinatensystems um eine beliebige Achse, so bleibt der Gesamtdrehimpuls $\underline{L}$ des durch die Lagrange-Funktion L beschriebenen physikalischen Systems erhalten:

Isotropie des Raumes $\Leftrightarrow$ **Drehimpulserhaltung**

Bem.: Gilt $\tilde{L} = L$ bei Drehung um eine bestimmte Achse (z.B. $\underline{d\varphi}$ in z-Richtung), so bleibt die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf diese bestimmte Richtung (also L_z) erhalten

■ Im von uns betrachteten Beispiel des MPS aus N wechselwirkenden MP ist die Invarianzbedingung $L = \tilde{L}$ erfüllt, wenn keine äußeren Felder vorhanden sind. Beweis:

$$(\underline{\tilde{r}}_i - \underline{\tilde{r}}_k)^2 = (\underline{r}_i + \underline{d\varphi} \times \underline{r}_i - \underline{r}_k + \underline{d\varphi} \times \underline{r}_k)^2 = \left[(\underline{r}_i - \underline{r}_k) + \underline{d\varphi} \times (\underline{r}_i - \underline{r}_k)\right]^2 =$$

$$= (\underline{r}_i - \underline{r}_k)^2 + 2\,(\underline{r}_i - \underline{r}_k) \cdot \underline{d\varphi} \times (\underline{r}_i - \underline{r}_k) + O\big((d\varphi)^2\big)$$

- **Verallgemeinerung: Theorem von E. Noether**

Jede einparametrige infinitesimale kontinuierliche Transformation der Koordinaten und der Zeit (H), die die Wirkung invariant lässt, bedeutet die Existenz des Integrals der Bewegung

$$Q(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)=\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\psi_i+\left(L-\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\varphi-F(\underline{q},t)=\text{const}\,. \qquad \text{(H4)}$$

<u>Beweis:</u> Wir entwickeln $\tilde{S}$ unter Berücksichtigung von $t=t(\tilde{t})$, also $d\tilde{t}=\frac{d\tilde{t}}{dt}\cdot dt$ in eine Taylor-Reihe nach Potenzen von ε

$$\tilde{S}=\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2}d\tilde{t}\,L(\underline{\tilde{q}},\underline{\dot{\tilde{q}}},\tilde{t})=\int_{t_1}^{t_2}dt\left\{L\left(\underline{q},\frac{d\underline{q}}{dt},t\right)+\frac{d}{d\varepsilon}\left[L\left(\underline{\tilde{q}},\frac{d\underline{\tilde{q}}}{d\tilde{t}},\tilde{t}\right)\frac{d\tilde{t}}{dt}\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}+O(\varepsilon^2)\right\}$$

(die Beiträge aus der Differentiation nach der oberen und unteren ε-abhängigen Integrationsgrenze ergeben die Konstante $L(\underline{\tilde{q}},\underline{\dot{\tilde{q}}},\tilde{t})\big|_{\tilde{t}=\tilde{t}_2}-L(\underline{\tilde{q}},\underline{\dot{\tilde{q}}},\tilde{t})\big|_{\tilde{t}=\tilde{t}_1}$). Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung ist die Wirkung S. Unterscheiden sich die zu $\tilde{S}$ und S gehörenden Lagrange-Funktionen lediglich um Terme, die als vollständige Ableitung einer Funktion $F(\underline{q},t)$ der verallgemeinerten Koordinaten und der Zeit darstellbar sind, dann gilt $\delta\tilde{S}=\delta S$. Also sind die Bewegungsgleichungen invariant unter der Transformation (H), wenn

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[L\left(\underline{\tilde{q}},\frac{d\underline{\tilde{q}}}{d\tilde{t}},\tilde{t}\right)\frac{d\tilde{t}}{dt}\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}=\frac{dF(\underline{q},t)}{dt}\to \underline{\text{Invarianzbedingung}}.$$

Wegen

$$\frac{d\tilde{t}}{dt}=1+\varepsilon\frac{d\varphi}{dt}+O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}}=\frac{d\tilde{q}_i}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}=\left(\dot{q}_i+\varepsilon\frac{d\psi_i}{dt}\right)\frac{1}{1+\varepsilon\frac{d\varphi}{dt}}+O(\varepsilon^2)=\left(\dot{q}_i+\varepsilon\frac{d\psi_i}{dt}\right)\left(1-\varepsilon\frac{d\varphi}{dt}\right)+O(\varepsilon^2)\cong\dot{q}_i+\varepsilon\frac{d\psi_i}{dt}-\varepsilon\,\dot{q}_i\frac{d\varphi}{dt}$$

ergibt die Auswertung der Invarianzbedingung

$$0=\frac{d}{d\varepsilon}\left[L\left(q_i+\varepsilon\psi_i,\dot{q}_i+\varepsilon\frac{d\psi_i}{dt}-\varepsilon\,\dot{q}_i\frac{d\varphi}{dt},t+\varepsilon\varphi\right)\left(1+\varepsilon\frac{d\varphi}{dt}\right)\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{f}\left[\underset{\circ\circ\circ}{\frac{\partial L}{\partial q_i}\psi_i}+\overset{***}{\underset{\circ\circ\circ}{\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}}}\left(\underset{\circ\circ\circ}{\frac{d\psi_i}{dt}}-\overset{***}{\dot{q}_i\frac{d\varphi}{dt}}\right)\right]+\frac{\partial L}{\partial t}\varphi+\overset{***}{L\frac{\partial\varphi}{\partial t}}=\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\psi_i+\left(L-\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\varphi\right]=0.$$

Die $_{\circ\circ\circ}$ markierten Terme haben wir unter Berücksichtigung der Lagrange-Gleichungen II. Art $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$ zu $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\psi_i\right)$ zusammengefasst. Mit Hilfe der Relation $\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{dH}{dt}=\frac{d}{dt}\left(L-\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$ ergeben die drei *** Terme $\frac{d}{dt}\left[\left(L-\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\varphi\right]$.

"Rezept" zur Anwendung des Noether-Theorems:

1. Bestimmen die Funktionen $\psi_i(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$ und $\varphi(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$ der ins Auge gefassten Transformation (H)

2. Überprüfe, ob die Lagrange-Funktion des betrachteten physikalischen Systems invariant gegenüber dieser Transformation ist. Dabei werden eventuell vorhandene Terme der Form $\frac{dF(\underline{q},t)}{dt}$ in L abgetrennt.

3. Liegt Invarianz vor, lässt sich aus $L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$, $\psi_i(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$, $\varphi(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$ und $F(\underline{q},t)$ mit Hilfe von (H4) das entsprechende Integral der Bewegung $Q(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)=\text{const}$ ausrechnen.

■ Beispiele

A: **1.** Wir wählen die Transformation $\psi_i = 0$ und $\varphi = 1$, d.h. $\tilde{q}_i(\tilde{t}) = q_i(t+\varepsilon)$, bzw.
$\frac{d\tilde{t}}{dt} = 1$ und $\frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}} = \frac{dq_i}{dt}$.

2. Für Systeme, deren Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Invarianzbedingung wegen $\frac{d}{d\varepsilon}\left[L\left(\underline{\tilde{q}}, \frac{d\underline{\tilde{q}}}{d\tilde{t}}\right)\frac{d\tilde{t}}{dt}\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = 0$ erfüllt.

3. Also ist für diese Systeme $Q(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \text{const}$.

B: **1.** Wir betrachten die Transformation $\tilde{q}_k = q_k + \varepsilon\delta_{ik}$, d.h. $\psi_{ik} = \delta_{ik}$ und $\tilde{t} = t$, also $\varphi = 0$.

2. Für Lagrange-Funktionen mit der zyklischen Koordinate q_i tritt das Argument $\tilde{q}_i$ nur in Form von $\frac{d\underline{\tilde{q}}}{d\tilde{t}} = \frac{d(q_i+\varepsilon)}{dt} = \frac{dq_i}{dt}$ auf. Folglich hängen alle Argumente von $\tilde{L}$ nicht von ε ab, die Invarianzbedingung $\frac{d}{d\varepsilon}\left[L\left(\underline{\tilde{q}}, \frac{d\underline{\tilde{q}}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right)\frac{d\tilde{t}}{dt}\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = 0$ ist erfüllt.

3. Mit (H4) reduziert sich Q auf $Q(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{const}$, also auf das bekannte Resultat, dass für eine zyklische Koordinate q_i der kanonisch konjugierte Impuls Integral der Bewegung ist.