6. Das Zwei-Körper-Problem

6.1 Problemstellung, Relativ- und Schwerpunktskoordinaten, Lagrange-Funktion der Relativbewegung (Bewegung im Zentralfeld)

Betrachtet werden zwei Punktmassen m_1 und m_2 an den Orten $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$, die über ein abstandsabhängiges Potenzial $U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ miteinander wechselwirken und ansonsten keinen weiteren Kräften wie äußeren Feldern, Reibungskräften usw. ausgesetzt sind. Die Lagrange-Funktion lautet

$$\underline{L(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dot{\underline{r}}_1, \dot{\underline{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\,\dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\,\dot{\underline{r}}_2^2 - U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)}\,.$$

Sie ist nicht explizit zeitabhängig, d.h., es gilt Energieerhaltung (s.u.).

Wir führen zunächst Schwerpunkts- und Relativkoordinaten $\underline{R}(t)$ bzw. $\underline{r}(t)$ ein

$$\underline{R}(t) := \frac{m_1\,\underline{r}_1(t) + m_2\,\underline{r}_2(t)}{M}, \quad \underline{r}(t) := \underline{r}_1(t) - \underline{r}_2(t), \quad M := m_1 + m_2 \text{ - Gesamtmasse.}$$

Sind die Abhängigkeiten $\underline{R}(t)$ und $\underline{r}(t)$ bekannt, lassen sich über

$$\underline{\underline{r}_1(t) = \underline{R}(t) + \frac{m_2}{M}\underline{r}(t) \quad \text{und} \quad \underline{r}_2(t) = \underline{R}(t) - \frac{m_1}{M}\underline{r}(t)} \tag{H0}$$

die gesuchten Bahnkurven $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$ der beiden Punktmassen bestimmen.
Nach einfachen algebraischen Umformungen finden wir für die transformierte Lagrange-Funktion

$$L(\underline{r}, \underline{R}, \dot{\underline{r}}, \dot{\underline{R}}) = \frac{M}{2}\dot{\underline{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}^2 - U(r)\,,$$

wobei $\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ die sogenannte reduzierte Masse bezeichnet.

Da $\underline{R}$ eine zyklische Variable ist, folgt $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{R}}}\right) = 0$ also $M\dot{\underline{R}}(t) = \text{const}$. Das bedeutet, der Gesamtimpuls ist Integral der Bewegung und der Schwerpunkt der beiden Punktmassen bewegt sich geradlinig-gleichförmig. Dieses Ergebnis haben wir wegen der Homogenität des Raumes im Fall des Zwei-Körperproblems von vornherein erwartet.

Sinnvollerweise legen wir nun den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt (Inertialkräfte treten nicht auf) und befassen uns fortan nur mit der Relativbewegung, deren Lagrange-Funktion

$$L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) = \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}^2 - U(r)$$

lautet. Sie beschreibt die dreidimensionale Bewegung eines fiktiven Teilchens der Masse μ im Zentralpotenzial U(r).

13.1.15

Wegen dieser Zentralsymmetrie wählen wir sphärische (Relativ)Koordinaten

$$\underline{r} = (r, \vartheta, \varphi)^T, \text{ also } \dot{\underline{r}} = (\dot{r}, r\dot{\vartheta}, r\sin\vartheta\,\dot{\varphi})^T$$

und erhalten

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - U(r) = L(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}).$$

In diese Lagrange-Funktion geht φ nicht explizit ein. Also ist φ zyklisch und aus $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ folgt

$$p_\varphi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \sin^2\vartheta = \text{const} =: L_z. \quad \text{DIES} \tag{H1}$$

p_φ ist der Drehimpuls der Relativbewegung. Die Drehimpulserhaltung ist Folge der Zentralsymmetrie, die für alle physikalischen Systeme mit rotationsinvarianter Lagrange-Funktion gilt (vgl. Kap. Symmetrie und Erhaltungssätze, Noether-Theorem).

Bemerkungen: (i) Die Drehimpulserhaltung ist geometrisch als Flächensatz interpretierbar. Dieser gilt für alle Zentralpotenziale. Im Fall $U(r) \sim r^{-1}$ ist dieser Zusammenhang in den beiden Abbildungen grafisch illustriert $\to$ 2. Kepler´sches Gesetz

(ii) $$L_z = \left\{ \begin{array}{l} \mu(x\dot{y} - \dot{x}y);\; x = r\sin\vartheta\,\cos\varphi, y = r\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \mu(\underline{r}\times\dot{\underline{r}});\; \underline{r} = r\,\underline{e}_r,\; \dot{\underline{r}} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\,\dot{\vartheta}\,\underline{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi \end{array} \right\} = \mu r^2\,\dot{\varphi}\,\sin^2\vartheta$$

Es lohnt sich also, die z-Achse in Richtung $\underline{L}$ zu orientieren, dann sind L_x und L_y Null. Als Konsequenz aus der Drehimpulserhaltung sind alle Bahnkurven bei Bewegung im Zentralfeld eben. Der Drehimpuls steht senkrecht auf der Bahnebene.

(iii) Tatsächlich hat die Lagrange-Gleichung für ϑ

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial\vartheta}\right) = \frac{d}{dt}(\mu r^2\,\dot{\vartheta}) - \mu r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = \mu(2r\,\dot{r}\,\dot{\vartheta} + r^2\ddot{\vartheta} - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2) = 0$$

für die Anfangsbedingungen $\vartheta(t = t_0) = \frac{\pi}{2}$ und $\dot{\vartheta}\big|_{t=t_0} = 0$ die Lösung $\vartheta(t) = \frac{\pi}{2}$. In diesem Fall ist $L_z = \mu r^2\,\dot{\varphi}$ bzw. $\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{L_z}{\mu r^2(t)}$.

Es ist somit sinnvoll, die Relativbewegung durch ebene Polarkoordinaten (r,φ) in der Bahnebene senkrecht zu L zu beschreiben, d.h. ab jetzt ist

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right) - U(r)\,.$$

Die Lagrange-Gleichung für φ ergibt wegen $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\,\dot{\varphi} = L_z$ die Relation

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_z}{\mu r^2}\ . \qquad \text{(H2)}$$

Aus der Lagrange-Gleichung für r $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right) = 0$ folgt mit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) = \mu\ddot{r},\ \ \frac{\partial L}{\partial r} = \mu\, r\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = \mu\, r\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$$

die Bahngleichung

$$\mu\ddot{r} = \mu\, r\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \overset{(H1)}{=} -\frac{\partial U_{eff}}{\partial r},\ \text{ wobei } U_{eff}(r) := U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}\ .$$

Fazit: Durch die Einführung des effektiven Potenzials $U_{eff}(r)$ ist das Zwei-Körper-Problem im dreidimensionalen Raum infolge von U(r) auf die eindimensionale Bewegung eines fiktiven Teilchens der Masse μ unter dem Einfluss des äußeren Feldes U_{eff} zurückgeführt worden. Der zweite Term in U_{eff} wird häufig als → Fliehkraftbarriere bezeichnet (Skizze: Qualitative Diskussion der Bahnkurven).

Für die Bewegung gilt Energieerhaltung:

$$\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = \text{const} =: E\,. \qquad \text{(H3)}$$

Formal folgt diese physikalisch sofort einleuchtende Beziehung aus der Tatsache, dass die Lagrange-Funktion $L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$ nicht explizit von der Zeit abhängt und deshalb (vgl. Kap. 2.4) $\dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L$ ein Integral der Bewegung ist; dass dieses Bewegungsintegral gleich der Energie E des Systems ist, möge jeder selbst durch einfache Rechnung verifizieren.

Zur Bestimmung der Bahnkurve r(t) müssen wir nicht die Bahngleichung lösen, sondern erhalten aus dem Energieerhaltungssatz (EES) $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}$, also

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}} \qquad \text{(H4)}$$

und damit für die Umkehrfunktion t(r)

$$t(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{eff}(r)]}} + t_0 ; \quad t(r_0) = t_0 . \qquad \text{(H5)}$$

Unter Verwendung des Drehimpulserhaltungssatzes (DIES), der auf (H1) führte, lässt sich bei bekanntem r(t) dann φ(t) berechnen

$$\varphi(t) = \frac{L_z}{\mu}\int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{r^2(t')} + \varphi_0 , \ \varphi(t_0) = \varphi_0 , \qquad \text{(H6)}$$

vorausgesetzt, es gelingt, das Integral in t(r) für gegebenes U(r) zu lösen und r(t) zu bestimmen. (H5) (nach Invertierung) und (H6) ergeben die Bahnkurven in ebenen Polarkoordinaten als Funktion der Zeit. Die Bewegungen der gravitierenden Massen m_1 und m_2 folgen dann aus (H0)

Alternativ können wir mit Hilfe der Relationen (H2, H4) die Bahnkurve in der r-φ-Phasenebene ausrechnen. Da

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dr} \overset{(H2,H4)}{=} \frac{L_z}{\mu r^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}}$$

folgt nach Integration

$$\varphi(r) = L_z \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu\left[E - U_{eff}(r')\right]}} + \varphi_0 = L_z \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu\left[E - U(r')\right] - \frac{L_z^2}{r^2}}} + \varphi_0 \, .$$

Energie E und Drehimpuls L_z sowie $\varphi_0 = \varphi(r_0)$ werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Diese Bahnkurven sind bei finiter Bewegung i.a. Rosettenbahnen, die die Fläche des Kreisrings zwischen r_{min} und r_{max} vollständig überstreichen [L^2, § 14.7]. Bei einmaligem Durchlaufen der Folge $r_{min} \to r_{max} \to r_{min}$ ändert sich der Winkel um (vgl. Skizze)

$$\Delta\varphi = 2\,L_z \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu\left[E - U(r')\right] - \frac{L_z^2}{r^2}}} \, .$$

Die Bahnkurven sind geschlossen, wenn die Winkeländerung nach n Durchläufen ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, d.h. $\Delta\varphi$ rationaler Teil von 2π ist:

Geschlossene Bahnkurven für $\Delta\varphi = 2\pi \frac{m}{n}$ (m,n –ganze Zahlen) $\leftrightarrow$ $U(r) \sim \begin{cases} r^{-1} \to \Delta\varphi = 2\pi \\ r^2 \to \Delta\varphi = \pi \end{cases}$

Diese Bedingung ist nur für das Gravitationspotenzial und den (3d) harmonischen Oszillator erfüllt. Für alle anderen Potenziale U(r) sind m und n inkommensurabel, so dass die Bahnkurve die Fläche des Kreisrings $r_{min} < r < r_{max}$ für $t \to \infty$ vollständig überstreicht.

Für einen <u>"Sturz in das Gravitationszentrum"</u> bei der Bewegung im Zentralfeld muss die Zentralfeldbarriere überwunden werden. Aus der Bedingung für die (klassisch) erlaubte Bewegung $r^2\,U(r) + L_z^2 / 2\mu < r^2\,E$ folgt, dass $r \to 0$ nur möglich ist, wenn

$$\lim_{r\to 0} r^2\, U(r) < -\frac{L_z^2}{2\mu} \quad \rightarrow \quad \text{Sturz ins Zentrum für} \quad \lim_{r\to 0} U(r) \propto \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{r^2}, \text{mit } \alpha > \dfrac{L_z^2}{2\mu} \\ -\dfrac{1}{r^n}, \text{ mit } n > 2 \end{cases}$$

6.2 Explizite Bestimmung der Bahnkurven bei Bewegung im Gravitationspotenzial

Eine qualitative Diskussion der klassisch erlaubten Bewegung unter Berücksichtigung des Energieerhaltungssatzes (H2) führt im Fall der finiten Bewegungen auf elliptische oder kreisförmige Bahnkurven sowie auf Hyberbelbahnen bei infiniter Bewegung.

Hier geht es nun um die explizite Berechnung der Bahnkurven r(φ) der finiten Bewegung. Wir integrieren nicht die Bahngleichung, sondern nutzen sofort das Bewegungsintegral (EES)

$$\frac{\mu}{2}\frac{L_z^2}{\mu^2 r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - \gamma\frac{\mu M}{r} = E \ .$$

Diese Darstellung ergibt sich aus (H3) unter Verwendung von $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L_z}{\mu r^2}$.

Wir substituieren r(φ) = 1/u(φ) und finden für die neue abhängige Variable

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}, \ \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -u^2\frac{dr}{d\varphi}, \ \text{also} \ \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi} \, .$$

Daraus folgt

$$\frac{L_z^2}{2\mu}u^4\frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2\mu}u^2 - \gamma\mu M\, u = E \ \xrightarrow{|\cdot 2\mu/L_z^2} \ \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{2\gamma\mu^2 M}{L_z^2}u = \frac{2\mu E}{L_z^2} \, .$$

Über die quadratische Ergänzung erhalten wir $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \left(u - \frac{\gamma\mu^2 M}{L_z^2}\right)^2 = \frac{2\mu E}{L_z^2} + \frac{\gamma^2\mu^4 M^2}{L_z^4}$ bzw.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{p}\right)^2=\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{2\mu E}{L_z^2}+\frac{1}{p^2}\right)}_{E_{HO}=\frac{A^2}{2}} \quad \text{(H7)}$$

nachdem wir die gesamte Gleichung mit $\frac{1}{2}$ multipliziert und den neuen Parameter p

$$\frac{1}{p}:=\frac{\gamma\mu^2 M}{L_z^2}$$

eingeführt haben.

Formal ist (H7) dem EES für einen harmonischen Oszillator äquivalent. Der erste Term auf der linken Seite beschreibt in dieser Analogie die kinetische Energie (u-Auslenkung des Schwingers, φ-Zeit, Masse gleich Eins) und der zweite Term die potentielle Energie (Federkonstante gleich Eins, Auslenkungen um die Ruhelage 1/p. In der von uns gewählten Interpretation ist der Term auf der rechten Seite von (H7) die Energie E_{HO} des fiktiven harmonischen Oszillators, die sich über $E_{HO}=A^2/2$ durch die Amplitude A

$$A:=\sqrt{\frac{2\mu E}{L_z^2}+\frac{1}{p^2}}=\frac{1}{p}\sqrt{1+\frac{2\mu E}{L_z^2}p^2}=\frac{1}{p}\sqrt{1+\frac{2\mu E}{L_z^2}\frac{L_z^4}{\gamma^2\mu^4M^2}}=\frac{1}{p}\sqrt{1+\frac{2E\,L_z^2}{\gamma^2\mu^3M^2}}=\frac{\varepsilon}{p}$$

der harmonischen Schwingung ausdrücken lässt. Dabei haben wir die Abkürzung

$$\varepsilon:=\sqrt{1+\frac{2E\,L_z^2}{\gamma^2\mu^3M^2}}$$

verwendet.

Die gesuchte Lösung u(φ) lautet also $u(\varphi)-\frac{1}{p}=A\cos(\varphi-\varphi_0)$ und wir erhalten mit r(φ) = 1/u(φ) und A = ε / p

$$r(\varphi)=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)},\ p=\frac{L_z^2}{\gamma\mu^2M},\ \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2E\,L_z^2}{\gamma^2\mu^3M^2}}\,. \qquad \text{(H8)}$$

(H8) ist die Darstellung der Kegelschnitte in Polarkoordinaten. Der Parameter ε bestimmt die Exzentrizität der Bahnkurven in Abhängigkeit von Energie und Drehimpuls der Bewegung.

Fallunterscheidung:

(i) E < 0 ($\varepsilon < 1$) $\rightarrow$ finite Bewegung ("gebundener Zustand"):

Bahnkurven sind Ellipsen mit M in einem der Brennpunkte. Da $\cos(\varphi - \varphi_0) = \left(\frac{p}{r} - 1\right)\frac{1}{\varepsilon}$ zwischen +1 und -1 liegen muss, gilt $r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon} < r < \frac{p}{1-\varepsilon} = r_{max}$. Nicht nur r(t) und φ(t) sind periodisch, auch r(φ) ändert sich zwischen diesen Grenzen periodisch, die BK sind geschlossen.

(i) E > 0 ($\varepsilon > 1$) $\rightarrow$ infinite Bewegung ("Streuzustand")

Die Bahnkurven der infiniten Bewegung sind Hyperbeln. Das fiktive Teilchen mit der Masse μ nähert sich aus dem Unendlichen kommend auf einer für hinreichend große r annähernd geraden Bahn dem Zentrum des Gravitationsfeldes, wird abgelenkt ($\rightarrow$ gestreut) und entfernt sich wieder Richtung Unendlich. Der Streuwinkel $\theta = 2\arcsin\frac{1}{\varepsilon}$ ist abhängig von Energie und Drehimpuls(iii).

Bemerkungen:

(i) Kepler´sche Gesetze (um 1610) wiederholen.

(ii) Wir haben hier den Ausdruck für die Gravitationskraft/Potential des Gravitationsfeldes als gegeben betrachtet und die Bahnkurven bestimmt. Newton hat aus den Kepler´schen Gesetzen das Gravitationskraft als Ursache für die Bewegung abgeleitet. Diese Aufgabe haben wir in den MMP behandelt.

(iii) Die Streuung von Teilchen wird in diesem Kurs nicht behandelt (eventuell nach der Klausur). Interessenten können das Skript der 10. Woche aus dem Kurs im WS 11/12 anschauen (damals Kapitel 4.2).