

7. Mechanik des starren Körpers (SK)

- Hantel, Billardkugel, Kreisel, keltischer Wackelstein usw.

Wir fassen den starren Körper (SK) als System aus N Massepunkten auf, deren relative Lage zueinander sich nicht verändert. Ein SK besitzt maximal sechs Freiheitsgrade, drei Translations- und drei Rotationsfreiheitsgrade (zwei zur Festlegung der Richtung der Drehachse $\underline{\omega}$, einen für $\omega = |\underline{\omega}|$).

Ein Kreisel, der in einem Punkt abgestützt ist, hat drei Freiheitsgrade; ein um eine feste Achse rotierendes physikalisches Pendel einen Freiheitsgrad; usw.

7.1 Raumfestes und körperfestes Bezugssystem

Wir führen ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem (RKS) mit den Ortsvektoren $\underline{R} = (X, Y, Z)^T$ und den (festen) Einheitsvektoren $\underline{E}_x, \underline{E}_y, \underline{E}_z$ sowie ein körperfestes (fest mit dem SK verbundenes) Koordinatensystem (KKS) ein, dessen Orts- und Einheitsvektoren wir wahlweise mit $\underline{r} = (x, y, z)^T$ und $\underline{e}_x(t), \underline{e}_y(t), \underline{e}_z(t)$ oder $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$ und $\underline{e}_1(t), \underline{e}_2(t), \underline{e}_3(t)$ bezeichnen. Das RKS ist ein Inertialsystem, das KKS nicht. Ist $\underline{R}_0(t)$ der Radiusvektor des Ursprungs des KKS, O, aus Sicht des RKS, setzt sich die infinitesimale Verschiebung eines Punktes P des SK mit dem Radiusvektor $\underline{R}(t)$ aus dem Anteil \underline{dR}_0 entsprechend der Verschiebung von O bei unveränderter Achsenrichtung $\underline{e}_i(t)$ und der auf O bezogenen Drehung von P um den Winkel $\underline{d\phi}$ zusammen. Also gilt $\underline{dR} = \underline{dR}_0 + \underline{d\phi} \times \underline{r}$ und daher

$$\frac{d\underline{R}}{dt} = \frac{d\underline{R}_0}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \underline{r} \quad \text{oder} \quad \underline{V}(t) = \underline{V}_0(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r} : \quad (7.1)$$

Die Geschwindigkeit des Punktes P im RKS addiert sich aus der Geschwindigkeit des Ursprungs des KKS im RKS und der Rotationsgeschwindigkeit des SK.

Verschieben wir O um einen Vektor $\underline{a} = \text{const}$, dann geht \underline{V} über in $\underline{\tilde{V}} = \underline{V}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{r} + \underline{a}) = \underline{V}_0 + \underline{\omega} \times \underline{a} + \underline{\omega} \times \underline{r} = \underline{\tilde{V}}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}$. Die Rotationsgeschwindigkeit hängt, im Gegensatz zur Translationsgeschwindigkeit, nicht von der Wahl des Ursprungs O ab.

7.1 Kinetische Energie und Drehimpuls des starren Körpers. Trägheitstensor, und Lagrange-Funktion

Fassen wir den SK als System aus N Massepunkten mit den Ortsvektoren $\underline{r}_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, N$) auf, dann ist seine kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \underline{V}^2 = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} (\underline{V}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})^2 = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \underline{V}_0^2 + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{V}_0 \cdot \underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})^2 = \\ &= \frac{M}{2} \underline{V}_0^2 + \underline{V}_0 \times \underline{\omega} \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{r}_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\underline{\omega}^2 \underline{r}_{\alpha}^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_{\alpha})^2]. \end{aligned}$$

denn

$$(\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})^2 = (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha}) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha}) \stackrel{\text{zykl}}{=} \underline{\omega} \cdot [\underline{r}_{\alpha} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})] = \underline{\omega} \cdot [\underline{\omega} (\underline{r}_{\alpha} \cdot \underline{r}_{\alpha}) - \underline{r}_{\alpha} (\underline{r}_{\alpha} \cdot \underline{\omega})] = \underline{\omega}^2 \underline{r}_{\alpha}^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_{\alpha})^2.$$

M bezeichnet die Gesamtmasse $M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$. Es ist günstig, den Ursprung des KKS in den

Schwerpunkt des SK zu legen, denn dann ist $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{r}_{\alpha} = 0$ und wir erhalten

$$T = \frac{M}{2} \underline{V}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\underline{\omega}^2 \underline{r}_{\alpha}^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_{\alpha})^2] =: T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} \quad (7.2)$$

Fazit: Denken wir uns die die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt, können wir den starren Körper hinsichtlich seiner kinetischen Energie der Translation, T_{trans} , als Massepunkt M auffassen. Der Term T_{rot} gibt die kinetische Energie der Rotationsbewegung um eine [Drehachse durch den Schwerpunkt](#) an.

Die "Koordinatenschreibweise" der Rotationsenergie sieht mit $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ und

$\underline{r}_\alpha = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, x_3^\alpha)^T$ folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\underline{\omega}^2 \underline{r}_{\alpha}^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_{\alpha})^2] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 \omega_i^2 r_{\alpha}^2 - \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i^{\alpha} \sum_{k=1}^3 \omega_k x_k^{\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\sum_{i,k=1}^3 \omega_i \omega_k \delta_{ik} r_{\alpha}^2 - \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i^{\alpha} \sum_{k=1}^3 \omega_k x_k^{\alpha} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \theta_{ik} \omega_i \omega_k \end{aligned}$$

wobei wir die Größe

$$\underline{\theta}_{ik} := \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 \delta_{ik} - x_i^{\alpha} x_k^{\alpha}) \quad \rightarrow \quad \text{Trägheitstensor des SK} \quad (7.3)$$

eingeführt haben.

Bei kontinuierlicher Massedichte $\rho(\underline{r})$ ergibt sich wie üblich mit Hilfe des Übergangs

$$m_{\alpha} \rightarrow \rho(\underline{r}_{\alpha}) d^3 r_{\alpha} \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \xrightarrow[\Delta V_{\alpha} \rightarrow 0]{N \rightarrow \infty} \int_V d^3 r \rho(\underline{r})$$

für den Trägheitstensor der Ausdruck

$$\underline{\theta}_{ik} := \int_V d^3 r \rho(\underline{r}) (r^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \quad (7.3a)$$

Offenbar ist der Trägheitstensor $\underline{\theta}$ das Analogon zur Masse bei der Translationsbewegung, beschreibt also das Beharrungsvermögen/die Trägheitseigenschaften des SK gegenüber Änderungen seiner Rotation. $\underline{\theta}$ hängt von der Lage des Ursprungs und der Orientierung der Achsen des KKS ab.

Wir können den Trägheitstensor $\underline{\underline{\theta}}$ als quadratische 3 x 3 Matrix auffassen. Diese Matrix ist offensichtlich symmetrisch, besitzt also nur 6 unabhängige Matrixelemente:

$$\underline{\underline{\theta}} = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} & \theta_{yz} \\ \theta_{zx} & \theta_{zy} & \theta_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

In (7.4) haben wir die Notation $x_1^{\alpha} = x_{\alpha}$, $x_2^{\alpha} = y_{\alpha}$, $x_3^{\alpha} = z_{\alpha}$ verwendet. Im kontinuierlichen Fall ist

$$\underline{\underline{\theta}} = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} & \theta_{yz} \\ \theta_{zx} & \theta_{zy} & \theta_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\underline{v}} d^3\mathbf{r} \rho(\underline{\mathbf{r}}) (y^2 + z^2) & -\int_{\underline{v}} d^3\mathbf{r} \rho(\underline{\mathbf{r}}) x y & -\int_{\underline{v}} d^3\mathbf{r} \rho(\underline{\mathbf{r}}) x z \\ -\int_{\underline{v}} d^3\mathbf{r} \rho(\underline{\mathbf{r}}) x y & \int_{\underline{v}} d^3\mathbf{r} \rho(\underline{\mathbf{r}}) (x^2 + z^2) & -\int_{\underline{v}} d^3\mathbf{r} \rho(\underline{\mathbf{r}}) y z \\ -\int_{\underline{v}} d^3\mathbf{r} \rho(\underline{\mathbf{r}}) x z & -\int_{\underline{v}} d^3\mathbf{r} \rho(\underline{\mathbf{r}}) y z & \int_{\underline{v}} d^3\mathbf{r} \rho(\underline{\mathbf{r}}) (x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (7.4a)$$

Die Lagrange-Funktion des SK lautet

$$L = \frac{M}{2} \underline{V}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \theta_{ik} \omega_i \omega_k - U(\underline{\mathbf{r}}), \quad \theta_{ik} := \int_{\underline{v}} d^3\mathbf{r} \rho(\underline{\mathbf{r}}) (\underline{\mathbf{r}}^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \quad (7.5)$$

Hier steht die potenzielle Energie $U(\underline{\mathbf{r}})$ für alle äußeren Felder, eine Wechselwirkung die den Abstand der Teilchen untereinander ändern könnte, gibt es im Fall des SK nicht.

Der Gesamtdrehimpuls des SK ist (aus Sicht des RKS)

$$\begin{aligned} \underline{L}_{\text{ges}} &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \underline{\mathbf{R}}_{\alpha} \times \dot{\underline{\mathbf{R}}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\underline{\mathbf{R}}_0 + \underline{\mathbf{r}}_{\alpha}) \times (\underline{\mathbf{V}}_0 + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}_{\alpha}) = \\ &= \underline{\mathbf{R}}_0 \times \underline{\mathbf{V}}_0 \sum_{\alpha} m_{\alpha} + \underline{\mathbf{V}}_0 \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{\mathbf{r}}_{\alpha} + \underline{\mathbf{R}}_0 \times \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{\mathbf{r}}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \underline{\mathbf{r}}_{\alpha} \times (\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}_{\alpha}) \end{aligned}$$

Legen wir wieder den Ursprung des KKS in den Schwerpunkt des SK, dann ist $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{r}_{\alpha} = 0$

und

$$\underline{L}_{\text{ges}} = \overbrace{\underline{R}_0 \times M \underline{V}_0}^{\text{Schwerpunktsdreimpuls } L_S} + \overbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [\underline{\omega} \underline{r}_{\alpha}^2 - \underline{r}_{\alpha} (\underline{r}_{\alpha} \cdot \underline{\omega})]}^{\text{Relativdreimpuls } L} \quad (7.6)$$

Für den Relativdreimpuls gilt

$$\underline{L}_i = \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \omega_k \quad \text{oder in Matrixschreibweise} \quad \underline{L} = \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\omega} \quad (7.7)$$

Beweis: Zur Vereinfachung der Notation unterdrücken wir den Index α bei x_i^{α} :

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [\underline{\omega} \underline{r}_{\alpha}^2 - \underline{r}_{\alpha} (\underline{r}_{\alpha} \cdot \underline{\omega})] = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) (\omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3) - (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) (x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + x_3 \omega_3) \right] = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left\{ \underline{e}_1 \left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \omega_1 - x_1^2 \omega_1 - x_1 x_2 \omega_2 - x_1 x_3 \omega_3 \right] + \underline{e}_2 [\dots] + \underline{e}_3 [\dots] \right\} = \\ &= \underline{e}_1 \left[\omega_1 \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_2^2 + x_3^2) - \omega_2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_1 x_2 - \omega_3 \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_1 x_3 \right] + \underline{e}_2 [\dots] + \underline{e}_3 [\dots] =: L_1 \underline{e}_1 + L_2 \underline{e}_2 + L_3 \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Für die Projektion L_1 des Drehimpulses auf die \underline{e}_1 - Richtung haben wir

$$L_1 = \omega_1 \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_2^2 + x_3^2) - \omega_2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_1 x_2 - \omega_3 \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_1 x_3 = \theta_{11} \omega_1 + \theta_{12} \omega_2 + \theta_{13} \omega_3$$

wie wir durch Vergleich mit (7.4) sofort erkennen.

Analog läuft der Beweis für die anderen beiden Komponenten $L_2 \underline{e}_2$ und $L_3 \underline{e}_3$.

Außerdem gilt zwischen der kinetischen Energie der Rotation, T_{rot} , und dem Rotationsanteil des Drehimpulses, \underline{L} , wegen

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha}) (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha}) \stackrel{\text{zykl}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underline{\omega} \cdot [\underline{r}_{\alpha} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})]$$

die Beziehung

$$\underline{T}_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\underline{r}_{\alpha} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\alpha})] = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{L} . \quad (7.8)$$

Beachte: Die beiden zeitabhängigen Vektoren $\underline{L}(t)$ und $\underline{\omega}(t)$ zeigen i.a. in unterschiedliche Richtungen.

7.3 Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente

Bisher haben wir zwar den Ursprung des KKS festgelegt (im Schwerpunkt), nicht jedoch die Orientierung seiner Achsen \underline{e}_i im Raum.

Nun sollen die \underline{e}_i so orientiert werden, dass der Trägheitstensor diagonal wird

$$\underline{\underline{\theta}} = (\theta_i \delta_{ik}) = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Dieses spezielle KKS heißt Hauptachsensystem (HAS), die dazugehörigen

Koordinatenachsen werden Hauptträgheitsachsen und die drei diagonalen Elemente θ_i

Hauptträgheitsmomente genannt.

Im HAS gelten für Drehimpuls \underline{L} und kinetische Energie der Rotation besonders einfache Beziehungen

$$\underline{L}_i = \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \omega_k = \sum_{k=1}^3 \theta_i \delta_{ik} \omega_k = \underline{\theta}_i \omega_i \quad (7.10a)$$

$$\underline{T}_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i L_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \omega_i \theta_i \delta_{ik} \omega_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \theta_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} (\theta_1 \omega_1^2 + \theta_2 \omega_2^2 + \theta_3 \omega_3^2) \quad (7.10b)$$

Wie schon gesagt sind die beiden Vektoren \underline{L} und $\underline{\omega}$ i.a. nicht parallel zueinander.

Wie nun ist $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ zu wählen (um welche Achse muss SK rotieren), damit der Drehimpuls in Richtung der Drehachse zeigt, d.h. $\underline{L} = \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\omega} = \theta \underline{\omega}$ gilt?

Um diese Frage zu beantworten, lösen wir die Eigenwertgleichung

$$\underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\omega} = \theta \underline{\omega}. \quad (7.11)$$

Da $\underline{\underline{\theta}}$ eine symmetrische Matrix ist, sind die Eigenwerte (die Hauptträgheitsmomente θ) reell und die Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander; sie bilden das gesuchte KKS aus den Hauptträgheitsachsen. Die Diagonalisierung von $\underline{\underline{\theta}}$ ist stets möglich. Sie geschieht über Rotationsmatrizen $\underline{\underline{A}}$, deren Spalten aus den Eigenvektoren von $\underline{\underline{\theta}}$ bestehen ($\tilde{\underline{\underline{\theta}}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$, vgl. Vorlesung Lineare Algebra und Kapitel Schwingungen in Systemen mit vielen Freiheitsgraden).

Die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} \theta_{xx} - \theta & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} - \theta & \theta_{yz} \\ \theta_{zx} - \theta & \theta_{zy} & \theta_{zz} - \theta \end{vmatrix} = 0 \quad (7.12)$$

ist ein Polynom dritten Grades mit drei reellen Wurzeln θ_1, θ_2 und θ_3 . Eingesetzt in die Eigenwertgleichung finden wir jeweils das Verhältnis $\omega_x^{(i)} : \omega_y^{(i)} : \omega_z^{(i)}$ und damit die Orientierung der i -ten Hauptträgheitsachse ($i = 1, 2, 3$).

Beispiele/Spezialfälle

Asymmetrischer Kreisel: $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$ - alle Hauptträgheitsmomente sind voneinander verschieden.

Symmetrischer Kreisel: $\theta_1 = \theta_2 = \theta \neq \theta_3$

In diesem Fall sind beliebige Linearkombinationen der Eigenvektoren $\underline{\omega}_1$ und $\underline{\omega}_2$ von $\underline{\theta}$ ebenfalls Eigenvektoren, denn aus $\underline{\theta} \cdot \underline{\omega}^{(1)} = \theta \underline{\omega}^{(1)}$ und $\underline{\theta} \cdot \underline{\omega}^{(2)} = \theta \underline{\omega}^{(2)}$ folgt $\underline{\theta} \cdot (\alpha \underline{\omega}^{(1)} + \beta \underline{\omega}^{(2)}) = \theta (\alpha \underline{\omega}^{(1)} + \beta \underline{\omega}^{(2)})$. Deshalb können wir zwei beliebige senkrecht aufeinanderstehende Vektoren aus der durch $\underline{\omega}_1$ und $\underline{\omega}_2$ aufgespannten Ebene und einen senkrecht auf dieser Ebene stehenden Vektor als Hauptträgheitsachsen wählen.

Kugelkreisel: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$

Jeder orthogonale Achsensatz durch den Schwerpunkt ist ein Hauptachsensystem.

1.1.15

Zwischenbilanz

1) Zwei Bezugssysteme zur Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers:

raumfestes Koordinatensystem (RKS)

Laborsystem, Inertialsystem

"Physik einfach"

z.B. im kräftefreien Fall $\underline{L}_{(RKS)} = \text{const}$

aber: $\theta_{ik} = \theta_{ik}(t)$ zeitabhängig!

körperfestes Koordinatensystem (KKS)

mitrotierend, kein Inertialsystem

"Physik schwieriger"

dafür sind die Komponenten des

Trägheitstensors bei gewähltem KKS^{*)}

zeitunabhängig, $\theta_{ik} = \text{const}$

2) Der Trägheitstensor $\underline{\theta}$ beschreibt die Trägheitseigenschaften des SK bezüglich Rotation, er ist symmetrisch und reell. Hinsichtlich der Translation ist der SK ein Massepunkt, der die Gesamtmasse im Schwerpunkt (Massemittelpunkt) vereinigt.

Im HAS vereinfachen sich die Euler'schen, da

$$\underline{\underline{\theta}} = (\theta_i \delta_{ik}) = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix} \text{ und mit } \underline{\underline{\omega}} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \underline{\underline{\dot{\omega}}} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} \text{ folgt}$$

$$\underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{\omega}} = \begin{pmatrix} \theta_1 \omega_1 \\ \theta_2 \omega_2 \\ \theta_3 \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{\omega}} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 \theta_1 & \omega_2 \theta_2 & \omega_3 \theta_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta_3 - \theta_2) \omega_2 \omega_3 \\ (\theta_1 - \theta_3) \omega_1 \omega_3 \\ (\theta_2 - \theta_1) \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Damit haben die Euler'schen Gleichungen des freien Kreisels im HAS die Form

$$\begin{aligned} \theta_1 \dot{\omega}_1 + (\theta_3 - \theta_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 + (\theta_1 - \theta_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 + (\theta_2 - \theta_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \tag{7.15}$$

(beachte die zyklischen Vertauschungen der Indices).

• **Analyse der Euler'schen Gleichungen des freien Kreisels aus der Sicht der nichtlinearen Dynamik**

Da alle Hauptträgheitsmomente verschieden von Null sind lässt sich (7.15) als autonomes dynamisches System

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{\theta_2 - \theta_3}{\theta_1} \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2} \omega_1 \omega_3 \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_3} \omega_1 \omega_2 \end{aligned} \tag{7.16}$$

auffassen. Wir untersuchen zunächst die stationären Zustände $\omega_i(t \rightarrow \infty)$, die sogenannten Fixpunkte oder 'Gleichgewichte' des dynamischen Systems. Sie beschreiben in unserem Fall Rotationen um eine zeitunabhängige Drehachse. Die rechten Seiten von (7.16) verschwinden für

$$\omega_i = \omega_0 = \text{const}, \quad \omega_j = 0, \quad \text{für } i \neq j,$$

d.h., die Rotationen um die Hauptträgheitsachsen sind stationär! Sind sie aber auch stabil gegen unvermeidliche kleine Störungen?

Um dies herauszufinden, führen wir (wie immer in nichtlinearen dynamischen Systemen) eine Stabilitätsanalyse der Rotationen um die Hauptträgheitsachsen (Fixpunkte) durch.

Als Beispiel betrachten wir die Rotation eines asymmetrischen Kreisels um die (körperfeste) z-Achse, also

$$\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3, \quad \omega_3 = \omega_0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

Wir überlagern infinitesimal kleine zeitabhängige Störungen, $\omega_i \rightarrow \omega_i + \delta\omega_i(t)$, und untersuchen, ob sie in linearer Näherung im Laufe der Zeit anwachsen oder nicht. Im konkreten Fall setzen wir

$$\omega_1(t) = \delta\omega_1(t), \quad \omega_2(t) = \delta\omega_2(t), \quad \omega_3(t) = \omega_0 + \delta\omega_3(t)$$

in die Gleichungen (7.16) ein, linearisieren sie $O((\delta\omega)^2)$ und lösen die linearisierten Gleichungen für $\delta\omega_i(t)$ wie gewohnt mit dem Ansatz $\delta\omega_i(t) \sim e^{\lambda t}$. Für $\text{Re } \lambda < (>) 0$ ist die Rotation stabil (instabil) gegen infinitesimal kleine Störungen. Die lineare Stabilitätsanalyse führt offensichtlich auf eine notwendige Bedingung für die Stabilität der Rotation (sie könnte instabil gegen Störungen endlicher Amplitude sein) und auf ein hinreichendes Kriterium für Instabilität (wenn die Rotation nicht einmal gegen kleine Störungen stabil ist, wird sie i.a. nicht stabil gegen größere Störungen sein).

Die Gleichung für $\dot{\omega}_3$ in (7.16) liefert in unterster Näherung $\delta\dot{\omega}_3 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_3} \delta\omega_1 \delta\omega_2$. Also

können wir $\omega_3 = \omega_0$ setzen (keine Korrekturen für ω_3 in linearer Näherung) und die verbleibenden beiden Gleichungen ergeben

$$\delta\dot{\omega}_1 + \frac{\theta_3 - \theta_2}{\theta_1} \omega_0 \delta\omega_2 = 0$$

$$\delta\dot{\omega}_2 + \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_1} \omega_0 \delta\omega_1 = 0$$

Mit $\delta\omega_i(t) \sim e^{\lambda t}$ finden wir die charakteristische Gleichung mit den Lösungen

$$\lambda^2 = \frac{(\theta_3 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3)}{\theta_1 \theta_2} .$$

Fallunterscheidung:

1) $\theta_3 < \theta_1, \theta_2$ oder $\theta_3 > \theta_1, \theta_2$, also Rotation um die Achse des kleinsten oder größten Hauptträgheitsmoments.

In diesem Fall ist λ^2 negativ, d.h., die $\lambda_{1/2}$ sind rein imaginär. Deshalb wachsen die Störungen $\delta\omega_i(t)$ weder an noch werden sie kleiner. Die Rotation entspricht einem indifferenten, neutralen Gleichgewicht.

2) $\theta_1 > \theta_3 > \theta_2$ oder $\theta_2 > \theta_3 > \theta_1$, also Rotation um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments.

Diese Rotation ist offensichtlich instabil, denn λ^2 ist positiv, also einer der beiden Werte $\lambda_{1/2}$ negativ reell. Die Drehachse entfernt sich von der Anfangsorientierung $\omega_3 = \omega_0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, da die Störungen $\delta\omega_i(t)$ exponentiell anwachsen.

Fazit: Für einen asymmetrischen freien Kreisel sind die Rotationen um die Achsen des größten bzw. kleinsten Hauptträgheitsmoments (neutral) stabil; die Rotation um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments ist instabil.

Rotiert der starre Körper nicht um eine seiner Hauptträgheitsachsen, ist $\underline{\omega}$ zeitabhängig. Die Lösungen der nichtlinearen Euler'schen Gleichungen können numerisch bestimmt werden und "beliebig" kompliziert sein.

Der symmetrische freie Kreisel ($\theta_1 = \theta_2 =: \theta$)

Die θ_3 entsprechende Hauptträgheitsachse ist die Symmetrieachse des Kreisels; sie wird auch Figurenachse genannt. Wir orientieren die z-Achse des KKS in Richtung dieser Achse. Die Euler'schen Gleichungen (7.16) vereinfachen sich in unserem Fall zu

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{\theta - \theta_3}{\theta} \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{\theta_3 - \theta}{\theta} \omega_1 \omega_3 \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{\theta - \theta}{\theta_3} \omega_1 \omega_2 = 0\end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $\omega_3 = \text{const}$, d.h., die Projektion von $\underline{\omega}(t)$ auf die Figurenachse bleibt konstant. Wird die erste Gleichung nach der Zeit abgeleitet und $\dot{\omega}_2$ mit

Hilfe der zweiten Gleichung ersetzt, dann ergibt sich $\ddot{\omega}_1 = \frac{\theta - \theta_3}{\theta} \omega_3 \dot{\omega}_2 = - \left(\frac{\theta - \theta_3}{\theta} \right)^2 \omega_1$, also

$\ddot{\omega}_1 + \gamma^2 \omega_1 = 0$ mit der Lösung

$$\omega_1(t) = A \sin(\gamma t + \delta), \text{ wobei } \gamma := \frac{\theta - \theta_3}{\theta} \omega_3.$$

Die Projektion von $\underline{\omega}(t)$ auf die x-Achse ändert sich also periodisch mit der Frequenz γ .

Aus der ersten Gleichung erhalten wir nun für die noch fehlende Abhängigkeit $\omega_2(t)$ über

$$\omega_2 = \frac{\theta}{\theta - \theta_3} \omega_3 \dot{\omega}_1 = \frac{1}{\gamma} \dot{\omega}_1 = \frac{1}{\gamma} \gamma A \cos(\gamma t + \delta),$$

also ebenfalls eine periodische Änderung mit Amplitude A und Frequenz γ .

Fazit: Die Rotationsachse ist gegenüber der Symmetrieachse des Kreisels geneigt, wobei $\underline{\omega}(t)$ die Mantelfläche eines auf seiner Spitze stehenden Kegels, des sogenannten Polkegels, beschreibt. Die periodische Bewegung von $\underline{\omega}(t)$ um die z-Achse heißt Präzession. Für den Öffnungswinkel des Polkegels gilt offensichtlich $\tan \varphi = A / \omega_3$. Falls Rotationsachse $\underline{\omega}(t)$ und Figuren-/Symmetrieachse des Kreisels in die gleiche Richtung zeigen, $\underline{\omega} = (0, 0, \omega_3)^T$, sind Betrag und Richtung von $\underline{\omega}$ zeitlich konstant. Falls nicht, bleibt nur der Betrag $\omega = |\underline{\omega}(t)|$ konstant, der Vektor $\underline{\omega}(t)$ hingegen läuft mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\gamma = (\theta - \theta_3) \omega_3 / \theta$ auf dem Polkegel um die Figurenachse. Der Drehimpuls L (im KKS) ändert sich gemäß (7.7)

$$\underline{L} = \underline{\theta} \cdot \underline{\omega} = \theta \omega_1(t) \underline{e}_1 + \theta \omega_2(t) \underline{e}_2 + \theta_3 \omega_3 \underline{e}_3.$$

Also rotiert auch \underline{L} mit der Frequenz γ um die Figurenachse, allerdings mit Amplitude θA . Der Betrag des Drehimpulses $L = \theta^2 [\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)] + \theta_3^2 \omega_3^2 = \theta^2 A^2 + \theta_3^2 \omega_3^2$ bleibt erhalten. Seien α und β die Winkel zwischen der \underline{e}_3 und $\underline{L}(t)$ bzw. $\underline{\omega}(t)$ finden wir

$$\tan \alpha = \frac{\theta A}{\theta_3 \omega_3} \quad \text{und} \quad \tan \beta = \frac{A}{\omega_3} \quad \text{also} \quad \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\theta}{\theta_3}.$$

Daraus ergibt sich für die gegenseitige Lage der Achsen \underline{e}_3 (Symmetrieachse des Kreisels), des Drehimpulses $\underline{L}(t)$ bzw. und der Rotationsachse $\underline{\omega}(t)$ die Fallunterscheidung

	<u>Hauptträgheitsmomente</u>	<u>Winkel</u>	<u>Reihenfolge der Achsen</u>
(i)	$\theta > \theta_3$ gestreckter Kreisel	$\alpha > \beta, \alpha, \beta < \pi/2$	$\underline{e}_3 - \underline{\omega} - \underline{L}$
(ii)	$\theta < \theta_3$ gestauchter Kreisel	$\alpha < \beta, \alpha, \beta < \pi/2$	$\underline{e}_3 - \underline{L} - \underline{\omega}$
(iii)	$\theta = \theta_3$ Kugelkreisel	$\alpha = \beta, \alpha, \beta < \pi$ \underline{e}_3 kann so orientiert werden, dass $\alpha = \beta = 0$	$\underline{e}_3 - \underline{L}, \underline{\omega}$ $\underline{\omega}$ liegt auf der \underline{L} -Achse

7.5 Der schwere symmetrische Kreisel

Damit ist ein im Schwerfeld (also nicht kräftefreier), an einem festen Punkt \rightarrow Aufpunkt gelagerter Kreisel mit $\theta_1 = \theta_2 =: \theta$ gemeint. Um die Symmetrie des Problems ausnutzen zu können, orientieren wir die Z-Achse (RKS) gegen die Richtung der Schwerebeschleunigung, $\underline{E}_z \parallel -\underline{g}$. Als Figurenachse/Symmetrieachse des Kreisels wählen wir \underline{e}_z (Rotation um $\underline{e}_3 = \underline{e}_z$).

Die potenzielle Energie des Kreisels ist (ϑ -Winkel zwischen \underline{E}_3 und \underline{e}_3) ist

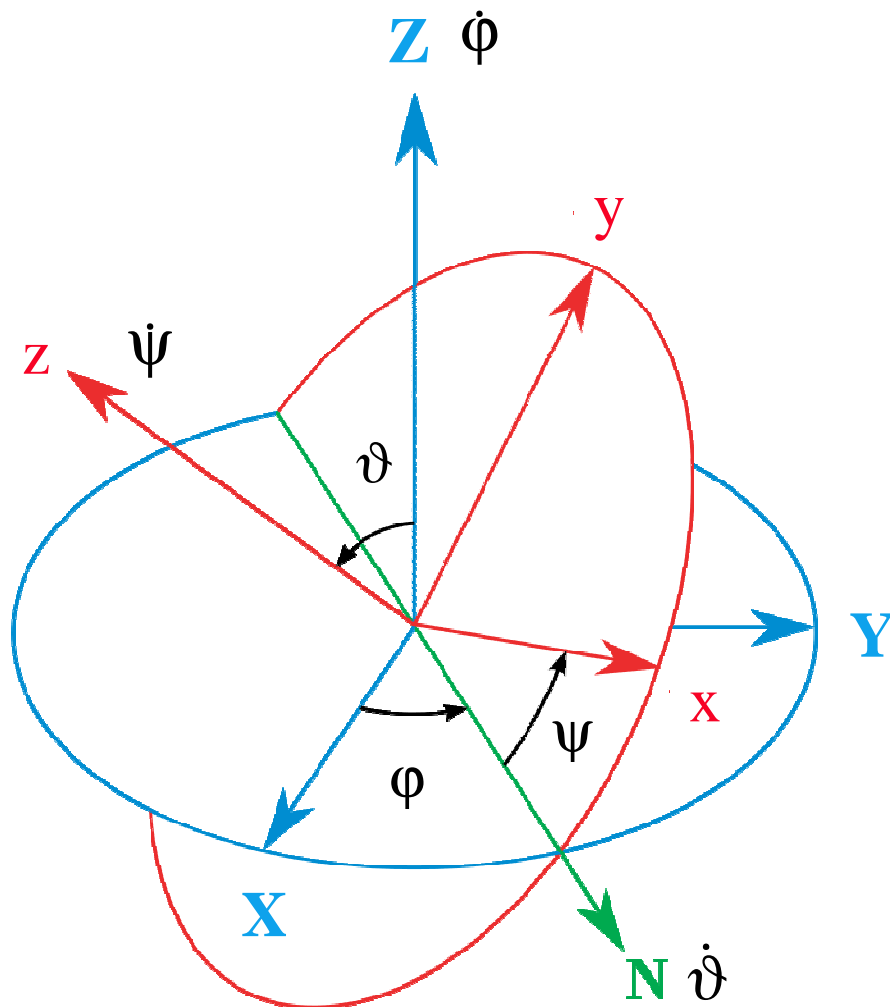
$$U(\vartheta) = m g a \cos \vartheta . \quad (7.17)$$

Im Folgenden bezeichnet m die im Schwerpunkt vereinigte Gesamtmasse des Kreisels und a den Abstand des Schwerpunkts vom Aufpunkt/Ursprung des RKS). Die kinetische Energie des Kreisels im HAS ist

$$T = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \cdot \underline{\theta} \cdot \underline{\omega} = \frac{\theta}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{\theta_3}{2} \omega_3^2 . \quad (7.18)$$

Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir mit Euler drei Winkel ϑ , φ und ψ , die die Lage der Achsen des KKS (x, y, z) relativ zu den Achsen des RKS (X, Y, Z) festlegen. ϑ ist der Winkel zwischen z - und Z -Achse. Weisen beide Achsen nicht in die gleiche Richtung, $\vartheta \neq 0$, dann schneiden sich x - y -Ebene und X - Y -Ebene entlang einer Linie, der sogenannten Knotenlinie. φ ist der Winkel zwischen Knotenlinie und y - Achse und ψ der Winkel zwischen Knotenlinie und x -Achse. Euler zu Ehren heißen φ , ψ und ϑ die **Euler'schen Winkel**.

Die Änderung eines jeden Euler'schen Winkels entspricht der Rotation um eine ganz bestimmte Achse: φ der Rotation um Z (Präzession), ψ der Rotation um z (Rotation des Kreisels um seine Figurenachse) und ϑ der Rotation um die Knotenlinie (vgl. Skizze).



Die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ und $\dot{\vartheta}$ haben im KKS die folgenden Komponenten (Projektionen auf die x, y und z Achse):

(i) Da $\underline{\dot{\phi}} \parallel$ zur Z-Achse (\underline{E}_z), ist $\dot{\phi} \cos \vartheta$ die Projektion auf die z-Achse und $\dot{\phi} \sin \vartheta$ die Projektion auf die x-y-Ebene. Nach Projektion auf x- und y-Achse über den Winkel ψ folgt

$$\underline{\dot{\omega}}_{\dot{\phi}} = (\dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi, \dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi, \dot{\phi} \cos \vartheta)^T$$

(ii) $\underline{\dot{\psi}} \parallel$ zur z-Achse (\underline{e}_z) folgt sofort $\underline{\dot{\omega}}_{\dot{\psi}} = (0, 0, \dot{\psi})^T$

(iii) $\underline{\dot{\vartheta}} \parallel$ zur Knotenlinie, die in der x-y-Ebene liegt, also keine Projektion auf die z-Achse hat.

Die Projektionen der Knotenlinie auf die x- bzw. y-Achse sind $\dot{\vartheta} \cos \psi$ bzw. $-\dot{\vartheta} \sin \psi$, d.h.

$$\underline{\dot{\omega}}_{\dot{\vartheta}} = (\dot{\vartheta} \cos \psi, -\dot{\vartheta} \sin \psi, 0)^T.$$

Insgesamt erhalten wir für die Drehung des KKS (also des SK) bei Änderung der Euler'schen Winkel

$$\underline{\omega} = \underline{\dot{\phi}} + \underline{\dot{\psi}} + \underline{\dot{\vartheta}} = (\dot{\phi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi, \dot{\phi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta} \sin\psi, \dot{\phi} \cos\vartheta + \dot{\psi})^T.$$

Nach einfacher Rechnung finden wir damit über

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = (\dot{\phi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi)^2 + (\dot{\phi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta} \sin\psi)^2 = \dots = \dot{\phi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2$$

unter Verwendung von $T = \frac{\theta}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{\theta_3}{2}\omega_3^2$ für die kinetische Energie der Rotation den folgenden Ausdruck für die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{\theta}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\theta_3}{2}(\dot{\phi} \cos\vartheta + \dot{\psi})^2 - m g a \cos\vartheta = L(\vartheta, \phi, \psi, \dot{\vartheta}). \quad (7.19)$$

Die Mühe hat sich gelohnt: ϕ und ψ sind zyklischen Koordinaten!! Die entsprechenden Integrale der Bewegung lauten

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \theta_3(\dot{\phi} \cos\vartheta + \dot{\psi}) = \text{const} =: L_3 \quad (7.20)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \theta \dot{\phi} \sin^2\vartheta + \theta_3(\dot{\phi} \cos\vartheta + \dot{\psi}) \cos\vartheta = \theta \dot{\phi} \sin^2\vartheta + L_3 \cos\vartheta = \text{const} =: L_Z \quad (7.21)$$

L_3 und L_Z sind die Projektionen des Drehimpulses auf die Figurenachs (z-Achse) bzw. die Z-Achse. Aus (7.20) und (7.21) folgt für $\dot{\phi}$ und $\dot{\psi}$

$$\dot{\phi} = \frac{L_Z - L_3 \cos\vartheta}{\theta \sin^2\vartheta} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\psi} = \frac{L_3}{\theta_3} - \dot{\phi} \cos\vartheta \quad (7.22a) \text{ bzw. } (7.22b)$$

und eingesetzt in die Lagrange-Funktion

$$\underline{L(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{\theta}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \vartheta)^2}{2 \theta \sin^2 \vartheta} - m g a \cos \vartheta + \frac{L_3^2}{2 \theta_3}. \quad (7.23)}$$

Weil die Lagrange-Funktion auch nicht explizit von der Zeit abhängt (wir haben die Reibung vernachlässigt), gilt auch der Energieerhaltungssatz

$$\underline{E = \frac{\theta}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \vartheta)^2}{2 \theta \sin^2 \vartheta} + m g a \cos \vartheta + \frac{L_3^2}{2 \theta_3} = \text{const}, \quad (7.24)}$$

den wir formal folgendermaßen schreiben können

$$\underline{\frac{\theta}{2} \dot{\vartheta}^2 + U_{\text{eff}}(\vartheta) = \tilde{E} =: E - \frac{L_3^2}{2 \theta_3} = \text{const}, \quad (7.25)}$$

wenn wir die eindimensionale Bewegung (Koordinate ϑ) eines gedachten Teilchens mit der Masse θ_1 und der potenziellen Energie

$$U_{\text{eff}}(\vartheta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \vartheta)^2}{2 \theta \sin^2 \vartheta} + m g a \cos \vartheta \quad (7.26)$$

vor Augen haben.

Damit ist die komplizierte Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels formal auf eine eindimensionale Bewegung zurückgeführt, mit der wir uns gut auskennen (Kap.). Die gleiche Vorgehensweise haben wir auch bei der Behandlung des Zwei-Körper-Problems und der Bewegung im Zentralfeld bereits erfolgreich angewendet (Kap.).

Explizite Lösungen für $\varphi(t)$, $\psi(t)$ und $\vartheta(t)$ führen auf elliptische Integrale, denn aus (7.25)

$$\text{folgt } \dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{2}{\theta} [\tilde{E} - U_{\text{eff}}(\vartheta)]}, \quad \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{\theta} [\tilde{E} - U_{\text{eff}}(\vartheta)]}} = dt \text{ also}$$

$$\underline{t(\vartheta) - t_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta'}{\sqrt{\frac{2}{\theta} [\tilde{E} - U_{\text{eff}}(\vartheta')]}}}, \quad t(\vartheta_0) = t_0. \quad (7.27)$$

Ist $t(\vartheta)$ bei bekannter effektiver potenzieller Energie U_{eff} ermittelt und die Umkehrfunktion $\vartheta(t)$ bestimmt, können wir zunächst $\varphi(t)$ aus (7.22a) und danach $\psi(t)$ aus (7.22b) berechnen.

Auch ohne die explizite Berechnung der Funktionen $\varphi(t; \varphi_0, L_z, L_3, \tilde{E})$, $\psi(t; \psi_0, L_z, L_3, \tilde{E})$ und $\vartheta(t, \vartheta, L_z, L_3, \tilde{E})$ lassen sich aus dem Verlauf der effektiven potenziellen Energie interessante Rückschlüsse über die qualitative Form der Kreiselbewegung ziehen.

Dazu führen wir die neue Variable $u := \cos \vartheta$ ein. Mit $\dot{u} = -\dot{\vartheta} \sin \vartheta$ also $\dot{\vartheta} = -\dot{u}(1-u^2)^{-1/2}$

können wir den EES (7.24) in der Form $\tilde{E} = \frac{\theta}{2} \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{(L_z - L_3 u)^2}{2\theta(1-u^2)} + m g a u$. Daraus ergibt

sich für $u = \cos \vartheta$ die Einschränkung

$$\dot{u}^2 = \frac{2}{\theta} (\tilde{E} - m g a u)(1-u^2) - \frac{(L_z - L_3 u)^2}{\theta^2} =: f(u) > 0. \quad (7.28)$$

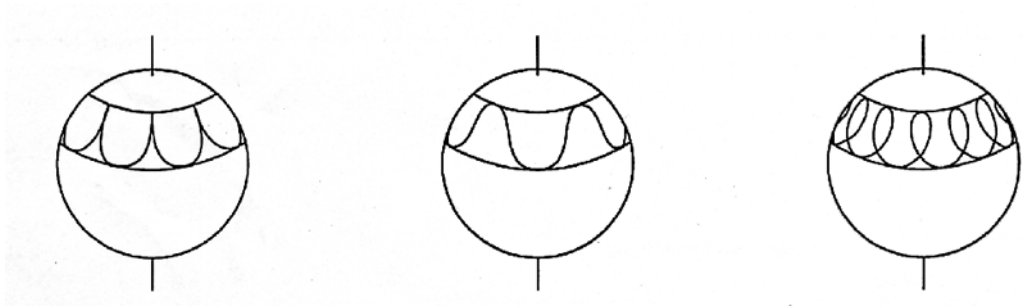
Eine Kurvendiskussion der Funktion $f(u)$ unter Berücksichtigung von $f(u \rightarrow \infty) \sim u^3$,

$f(u=0) = 2/\theta E' - L_z^2/\theta > 0$, und $f(u=\pm 1) < 0$ falls $L_z \neq L_3$, zeigt, dass das kubische Polynom $f(u)$ im betrachteten Fall drei reelle Nullstellen hat, von denen die größte unphysikalisch ist, weil sie außerhalb des Definitionsbereichs $-1 \leq u \leq 1$ liegt. Die beiden anderen Nullstellen, u_1 und u_2 , begrenzen den Bereich positiver Werte von $f(u)$ und damit den Bereich der möglichen Änderungen von ϑ . Die entsprechende Bewegung ist eindimensional finit, d.h., $\vartheta(t)$ ändert sich periodisch im Intervall

$$\vartheta_1 \leq \vartheta(t) \leq \vartheta_2, \quad (7.29)$$

dessen Grenzen aus $\vartheta_{1/2} = \cos u_{1/2}$ ermittelt werden können. Weil ϑ der Winkel zwischen Figuren- und Z-Achse ist, ist der Präzession $\varphi(t)$ die Nutationsbewegung $\vartheta_1 \leq \vartheta(t) \leq \vartheta_2$ der Figurenachse überlagert.

Zur geometrischen Veranschaulichung der Bewegung wird die Bahn des Durchstoßpunktes der Figurenachse durch die Oberfläche eines Kreises mit dem Zentrum im Aufpunkt gezeichnet.



Links erreicht die Präzessionsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ jenseits von ϑ_2 , in der Mitte zwischen ϑ_1 und ϑ_2 und rechts gerade bei ϑ_2 den Wert Null.

Die Kurvendiskussion der Funktion $f(u)$ führt zu weiteren interessanten Beobachtungen, die sich nach einfacher Rechnung beweisen lassen und mit unseren Alltagserfahrungen übereinstimmen:

A) Je größer ψ , je schneller also der Kreisel um seine Figurenachse rotiert,

- desto kleiner ist die "Amplitude der Nutation" $\vartheta_2 - \vartheta_1$,
- desto höher ist die Nutationsfrequenz ω_N und
- desto kleiner ist $\omega_p = m g a / L$, desto langsamer also die Präzession.

Die Reibung im Auflage- oder Aufhängepunkt dämpft die Nutation in der Regel nach kurzer Zeit, danach wird nur die Präzession des schnell rotierenden Kreisels beobachtet.

B) Zum Zeitpunkt $t = 0$ senkrechter stehender Kreisel

Aus $\vartheta(t=0) = 0$ folgt $u(t=0) = 1$. Also ist $L_3 = L_Z$ und damit $\underline{\omega}(t=0) = (0, 0, \dot{\psi})^T$. Mit

$T(t=0) = \frac{\theta}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{\theta_3}{2}\omega_3^2 = \frac{\theta_3}{2}\dot{\psi}^2$ finden wir aus (7.25) für die Summe aus kinetischer

und potentieller Energie des Kreisels $E = \frac{\theta_3}{2}\dot{\psi}^2 + m g a \cos \vartheta + \frac{L_3^2}{2\theta_3} = \text{const}$ und mit

$\tilde{E} =: E - \frac{L_3^2}{2\theta_3} = m g a u$ schließlich für die Funktion $f(u)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{2}{\theta}(\tilde{E} - m g a u)(1 - u^2) - \frac{(L_Z - L_3 u)^2}{\theta^2} = \frac{2}{\theta}\tilde{E}(1 - u)(1 - u^2) - \frac{L_3^2(1 - u)^2}{\theta^2} = \\ &= (1 - u)^2 \left[\frac{2\tilde{E}}{\theta}(1 + u) - \frac{L_3^2}{\theta^2} \right] \end{aligned}$$

Damit besitzt $f(u)$ im Fall **B**) eine doppelte reelle Nullstelle $u_{1/2} = 1$ und die reelle Nullstelle

$$u_3 = \frac{L_3^2}{2\tilde{E}\theta} - 1.$$

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

(i): Für sehr schnell rotierende Kreisel kann L_3 so groß werden, dass u_3 größer als Eins wird und damit aus dem physikalisch sinnvollen Bereich rutscht. Dann bleibt für große Zeiten nur der entartete Fixpunkt $u_{1/2} = 1$ "übrig", also $u(t \rightarrow \infty) = 1$. Mit anderen Worten: Solange der Kreisel schnell genug rotiert, bleibt er senkrecht stehen; er wird manchmal als *schlafender Kreisel* bezeichnet.

(ii) Reibung vermindert die Rotation des Kreisels. Dadurch sinken $\omega_3 = \dot{\psi}$ und L_3 solange, bis u_3 den Wert Eins unterschreitet und eine Nutation zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \vartheta_3$, $\cos \vartheta_3 = u_3$ beginnt: Der Kreisel "erwacht".

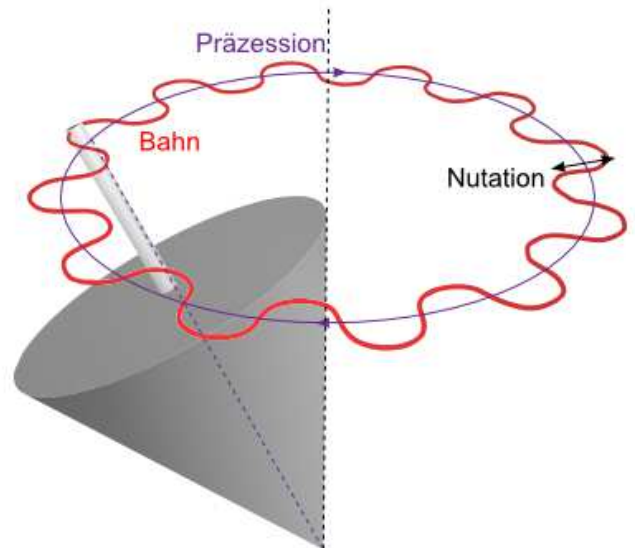
Eine vollständige Analyse muss eine Stabilitätsanalyse des Fixpunkts $\vartheta = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$ einschließen; die lineare Stabilitätsanalyse liefert wegen der Entartung des Fixpunkts keine Aussage

Zusammenfassung

Die Schwerkraft übt auf den Kreisel mit der Gesamtmasse m das Drehmoment $\underline{M} = \underline{a} \times m\mathbf{g}$. Wegen $\dot{\underline{L}}_{(\text{RKS})} = \underline{M}$ bleibt der Drehimpuls \underline{L} nicht erhalten. Da aber die Projektion von \underline{M} auf die Z-Achse sich wegen $M_z = 0$ nicht ändert, gilt $L_z = \text{const}$ und im vorliegenden Fall $L = |\underline{L}| = \text{const}$.

\underline{M} erzeugt eine Rotation von \underline{L} um die Z-Achse. Die Frequenz dieser Präzessionsbewegung $\omega_p = m g a / L$ hängt nicht von der Neigung der Kreiselachse (Figuren-achse) gegenüber der Richtung des

Schwerefelds (Winkel ϑ zwischen Z- und z-Achse) ab.



Beweis: Im RKS haben wir

$$L_r = L \sin\vartheta, \quad d\vartheta = \frac{dL_r}{L_r} \stackrel{\text{da } L_z = \text{const}}{\uparrow} = \frac{dL}{L_r} = \frac{M dt}{L \sin\vartheta}, \quad \text{also} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_p = \frac{M}{L \sin\vartheta} = \frac{m g a \sin\vartheta}{L \sin\vartheta} = \frac{m g a}{L}$$

oder in vektorieller Schreibweise $\underline{\omega}_p \times \underline{L} = \underline{M}$. (RKS) (7.30)

Das Drehmoment der Schwerkraft wirkt \perp zur Z-Achse, liegt somit in der X-Y-Ebene. Einer Kraft, die an seinem Schwerpunkt angreift, weicht der Kreisel senkrecht zur Wirkungslinie aus, während ein nicht rotierender starrer Körper wie ein Massepunkt translatorisch in Richtung einer am Schwerpunkt angreifenden Kraft beschleunigt wird.

Der beschriebenen Präzessionsbewegung ist i.a. eine Nutation der Figurenachse überlagert bei der sich der Winkel ϑ zwischen zwei Extremwerten periodisch ändert.

Im Fall $\underline{M} = 0$ (im Schwerfeld muss dazu die Figurenachse in $-g$ Richtung weisen) gibt es nur die Nutation der Figurenachse um den in diesem Fall konstanten Drehimpuls, $\underline{L} = \text{const}$.

Häufig dämpft die Reibung in den Aufnahmelagern der Kreiselachse die Nutation $\underline{M} \neq 0$ schnell ab und die Präzession von \underline{L} um die Z-Achse dominiert die Kreiselbewegung. Ist die Nutation ausgedämpft, fallen \underline{L} und $\underline{\omega}$ wieder mit der Figurenachse zusammen und wir haben $\underline{L} = \theta_3 \underline{\omega}$ sowie $\underline{M} = \underline{\omega}_p \times \theta_3 \underline{\omega}$. Das Kreiselmoment

$$\underline{M}' = -\underline{M} = \theta_3 \underline{\omega} \times \underline{\omega}_p \quad (7.31)$$

übt der Kreisel während der Präzession auf seine Führung aus. Der entsprechende Deviationswiderstand kann bei abrupter Änderung der Richtung der Drehachse schnell rotierender Kreisel beträchtliche Werte erreichen: Fahrradachse in der Hand halten, Felge in schnelle Rotation bringen, bei schneller Änderung der Orientierung der Achse treten große Kräfte auf. Ähnlich: Flugzeugpropeller in steilen Kurven.

Fazit: Schwerer symmetrischer Kreisel

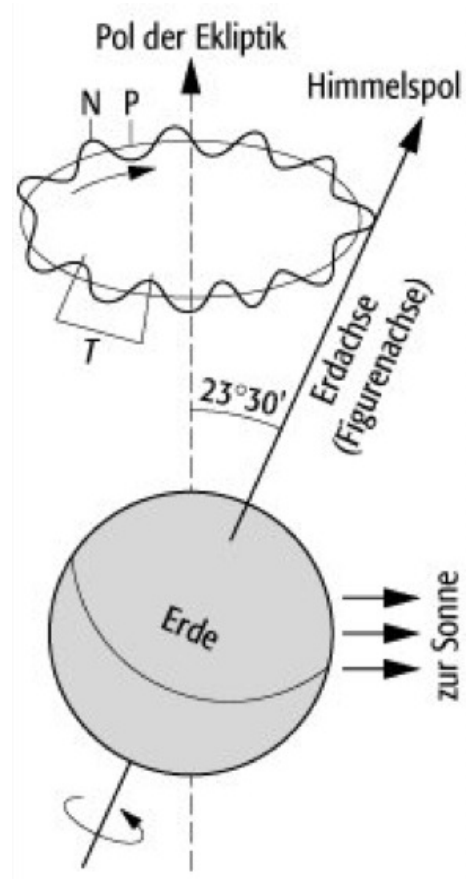
(i) Sowohl die Projektion L_Z des Drehimpulses \underline{L} auf die Z-Achse (Richtung $-\underline{g}$) als auch die Projektion L_3 von \underline{L} auf die Figurenachse (Symmetrieachse des Kreisels, $\underline{\omega}(t)$) sind Integrale der Bewegung.

(ii) Beide Bedingungen lassen sich gleichzeitig nur dadurch erfüllen, dass \underline{L} um die Z-Achse rotiert (Präzession) und die Figurenachse um \underline{L} (Nutation). Die Amplituden und die Frequenzen von Präzession und Nutation lassen sich auf der Basis der abgeleiteten Gleichungen bei bekannten Werten von L_Z , L_3 und E' berechnen. Die Präzessionsfrequenz ω_p ist unabhängig vom Neigungswinkel der Kreiselachse zur Z-Achse.

(iii) Ein schwerer Kreisel weicht einer auf ihn wirkenden Kraft senkrecht dazu aus.

Beispiele: Präzession der Erdachse

Die rotierende Erde (vgl. Kap.) ist ein leicht abgeplatteter, näherungsweise symmetrischer schwerer Kreisel (Massedichte in erster Näherung als konstant annehmen). Der Hauptbeitrag zum wirkenden Drehmoment ist dem Einfluss der Sonne geschuldet, aber auch die anderen Planeten tragen in Abhängigkeit von ihrer Stellung bei. Das führt zu einer Präzession der Erdachse senkrecht zur Ekliptik mit einer Periode von ca. 26000 Jahren. Die alten Ägypter haben den Polarstern in einem anderen Sternbild gesehen als wir heute ...



Überlagerung von astronomischer Nutation (N) und Präzession (P) der Erde (T: Periode)

Copyright 1998 Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

in einem Punkt aufgehängte Figurenachse

kardanische Aufhängung, Gyroskop: $L \parallel Z$ -Achse, deren Richtung fest liegt (Hubschrauber, Schiffsmodele, E-Klasse)

Kreiselkompass: Kreisel, dessen Achse sich nur in der horizontalen Ebene bewegen kann, der also nicht momentenfrei ist. Infolge der Erdrotation ändert sich die horizontale Ebene mit der Position auf der Erde und es wirkt ein Drehmoment auf den Kreisel. Letzterem weicht der Kreisel senkrecht zur wirkenden Kraft aus, indem er seine Achse \parallel zum Meridian orientiert. Dann ist das wirkende Drehmoment Null; die Figurenachse zeigt immer in Nord-Süd-Richtung.

Stehaufkreisel, Keltischer Wackelstein, *Celt*, *Rattleback*.