2. Formulierung der Klassischen Mechanik nach Lagrange und Euler

2.0 Historie

Pierre Maupertuis (1698-1759) sprach 1746 als erster von einem allgemeingültigen Prinzip der Natur, "extremal oder optimal abzulaufen". Auf Leonhard Euler (1707-1783) und Jean Louis Lagrange (1736-1813) geht die mathematisch präzise Fassung zurück: ein solches Prinzip bedeutet die Gültigkeit von Euler-Lagrange-Gleichungen. Die Lagrange´sche Formulierung der Mechanik stammt aus dem Jahr 1788. 1834 formulierte William Hamilton das nach ihm benannte Variationsprinzip.

2.1 Ableitung der Newton´schen Bewegungsgleichung aus einem Variationsprinzip

Betrachte einen Körper (Masse m), der sich im Potenzial $U(\underline{r})$ bewegt, dessen Lagrange-Funktion also

$$L(\underline{r},\dot{\underline{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - U(\underline{r})$$

lautet. Wir führen als neue fundamentale Größe die <u>Wirkung S</u> (das Wirkungsfunktional)

$$S[\underline{r}(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt\; L\big(\underline{r}(t),\dot{\underline{r}}(t)\big)$$

ein. Für jede Bahnkurve/Trajektorie $\underline{r}(t)$ zwischen den Positionen $\underline{r}(t_1)$ und $\underline{r}(t_2)$ ist das Funktional $S[\underline{r}(t)]$ eine bestimmte Zahl. Wir betrachten Bahnkurven

$$\tilde{\underline{r}}(t) = \underline{r}(t) + \delta\underline{r}(t),\; \delta\underline{r}(t_1) = \delta\underline{r}(t_2) = 0\,,$$

mit kleine Abweichungen/Variationen $\delta\,\underline{r}(t)$
von $\underline{r}(t)$, die am Anfangs- und Endpunkt der
Bewegung $\underline{r}(t_1)$ bzw. $\underline{r}(t_2)$ verschwinden.

Skizze

Beim Übergang von $\underline{r}(t)$ zu $\tilde{\underline{r}}(t) = \underline{r}(t) + \delta\underline{r}(t)$ variiert die Wirkung um

$$\delta S := S[\tilde{\underline{r}}(t)] - S[\underline{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}(\dot{\underline{r}} + \delta\dot{\underline{r}})^2 - U(\underline{r} + \delta\underline{r}) \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - U(\underline{r}) \right].$$

Für <u>kleine Variationen</u> $\delta\,\underline{r}(t)$ der Trajektorie finden wir in linearer Näherung (Taylor-Reihe) für die Variation der Wirkung δS

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(m\,\dot{\underline{r}} \cdot \delta\dot{\underline{r}} - \left.\frac{\partial U}{\partial \underline{r}}\right|_{\underline{r}(t)} \cdot \delta\underline{r} \right) + O\left((\delta\underline{r})^2, (\delta\dot{\underline{r}})^2\right) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m \frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}} \cdot \delta\underline{r}) - m\,\ddot{\underline{r}} \cdot \delta\underline{r} - \left.\frac{\partial U}{\partial \underline{r}}\right|_{\underline{r}(t)} \cdot \delta\underline{r} \right] = \underbrace{m\,(\,\dot{\underline{r}} \cdot \delta\underline{r}\,)\Big|_{t_1}^{t_2}}_{0,\text{ da } \delta\underline{r}(t_1) = \delta\underline{r}(t_2) = 0} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-m\,\ddot{\underline{r}} - \left.\frac{\partial U}{\partial \underline{r}}\right|_{\underline{r}(t)} \right) \cdot \delta\underline{r}$$

Wir erkennen, dass δS für <u>beliebige</u> kleine Variationen der Trajektorie $\delta\underline{r}$ nur dann verschwindet, wenn die ungestörte Trajektorie $\underline{r}(t)$ der Newton´schen BWG genügt:

$$\underline{\delta S = 0} \quad \text{wenn} \quad \underline{m\,\ddot{\underline{r}}(t) = -\left.\frac{\partial U}{\partial \underline{r}}\right|_{\underline{r}(t)} = F(\underline{r}(t))} \quad \text{für beliebige kleine } \delta\underline{r}(t) \text{ mit } \delta\underline{r}(t_1) = \delta\underline{r}(t_2) = 0\ .$$

Das bedeutet: Die NBG ist äquivalent zur Forderung

$$\underline{\delta S[\underline{r}(t)] := \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\ L\left(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t)\right) = 0}\,.$$

Anstelle des II. Newton´schen Axioms kann auch die Extremalität der Wirkung entlang der Bahnkurve postuliert werden. Das führt auf eine vollkommen neue, alternative Formulierung der Mechanik, deren Verallgemeinerungen sich bis in die Feldtheorie hinein erstrecken.

Die <u>tatsächlich realisierte</u> Bahnkurve zwischen zwei Orten mit den Radiusvektoren $\underline{r}(t_1)$ und $\underline{r}(t_2)$ zeichnet sich unter allen <u>denkbaren</u> Bahnkurven Trajektorien dadurch aus, dass die Wirkung entlang dieser Trajektorie extremal (meist minimal) ist. Die Natur "wählt unter allen denkbaren Bewegungen diejenige mit der extremalen Wirkung aus".

2.2 Einschub Variationsrechnung

1696 formulierte Jacob Bernoulli das Brachystochronenproblem (→ Notrutsche), das als Geburtsstunde der Variationsrechnung gilt:

Entlang welcher Kurve y(x) gelangt ein reibungsfrei im Schwerefeld gleitender Körper in kürzester Zeit von $P_1(x_1,y_1)$ nach $P_2(x_2,y_2)$?

Zeit: $T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v}$, Wegelement: $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$ Skizze

Energieerhaltung: $\frac{m}{2}v^2 = mg(y_1 - y)$, also $v^2 = 2g(y_1 - y)$.

Insgesamt ergibt sich das Funktional

$$T[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2g\left[y_1 - y(x)\right]}}.$$

Damit T für die Kurve y(x) minimal wird, muss $T[y(x) + \delta y(x)] > T[y(x)]$ für beliebige, hinreichend kleine $\delta y(x)$ gelten.

Wir betrachten im Folgenden Funktionale der allgemeinen Form

$$F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx\ f(y, y', x),\ \ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2$$

F[y] hat ein Extremum bei y(x), wenn für die Variation des Funktionals, δF, gilt

$$\delta F := F[y + \delta y] - F[y] = 0. \qquad \text{(notwendige Bedingung)}$$

Um die Frage nach der notwendigen Bedingung für die Extremalität des Funktionals F[y(x)] auf die nach dem Extremum einer Funktion zurückführen zu können setzen wir

$\delta y = \delta y(x) = \varepsilon\,\eta(x)$, ε infinitesimal klein, $\eta(x)$ differenzierbar mit $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

und fassen das Funktional als Funktion des Parameters ε auf

$F[y(x) + \delta y(x)] = F[y(x) + \varepsilon\,\eta(x)] = F(\varepsilon)$.

Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von F(ε) lautet

$$\left.\frac{dF(y+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0\,,\quad \text{für alle hinreichend kleinen } \eta(x)\,.$$

Aus $dF(y+\varepsilon\eta) = \int_{x_1}^{x_2} dx\; f(y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta', x) + \frac{\partial f}{\partial y}\varepsilon\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\varepsilon\frac{d\eta}{dx} + \ldots$ folgt

$$\left.\frac{dF(y+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx\left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d\eta}{dx}}_{\text{partiell}}\right) = \int_{x_1}^{x_2} dx\;\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \underbrace{\eta(x)\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\right|_{x_1}^{x_2}}_{\eta(x_1)=\eta(x_2)=0} - \int_{x_1}^{x_2} dx\;\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\,.$$

Also ist $\int_{x_1}^{x_2} dx\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta(x) = 0$ für beliebige hinreichend kleine η(x). Damit muss y(x) der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f(y,y',x)}{\partial y'}\right] - \frac{\partial f(y,y',x)}{\partial y} = 0$$

genügen → Euler-Lagrange-Gleichung der Variationsrechnung.

Verallgemeinert auf ein Funktional von n Funktionen $y_i(x)$ einer Variablen x mit festen Randwerten $y_i(x_1) = y_{i1}$, $y_i(x_2) = y_{i2}$, i = 1,2,…,n findet man auf analoge Weise durch Betrachtung der Funktion $F(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n)$ zum Funktional $F[y_1 + \varepsilon_1\eta_1,\ldots, y_n + \varepsilon_1\eta_n]$ als notwendige Bedingung für δF = 0, dass die Funktionen gesuchten Funktionen $y_i(x)$ den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f(\underline{y},\underline{y}',x)}{dy_i'}\right]-\frac{\partial f(\underline{y},\underline{y}',x)}{dy_i}=0,\ i=1,2,...,n$$

genügen müssen.

17.11.10

2.3 Lagrange-Gleichungen II. Art

Über die Zuordnungen/Entsprechungen

$$x \leftrightarrow t,\ \underline{y}(x) \leftrightarrow \underline{q}(t),\ f(\underline{y},\underline{y}',x) \leftrightarrow L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t) \text{ und } F[\underline{y}]=\int_{x_1}^{x_2} dx\ f(\underline{y},\underline{y}',x) \leftrightarrow S[q]=\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$$

erkennt man aus Kapitel 2.2, dass Lösungen $\underline{q}(t)$ der gekoppelten Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{dq_i}=0,\ i=1,2,...,f \text{ das Wirkungsfunktional } S[q]=\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t) \text{ extremalisieren,}$$

und dass diese Gleichungen aus der Bedingung $\delta S[q]=\delta\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)=0$ folgen.

Davon können wir uns noch einmal direkt mit den schon in 2.1/2.2 verwendeten Methoden überzeugen. Dazu betrachten wir ein physikalisches System, dessen Zustand durch f verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q}(t)=\left(q_1(t),q_2(t),\ldots,q_f(t)\right)$ und f entsprechende verallgemeinerte Geschwindigkeiten $\underline{\dot{q}}(t)=\left(\dot{q}_1(t),\dot{q}_2(t),\ldots,\dot{q}_f(t)\right)$ beschrieben wird. Seine Lagrange-Funktion sei $L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)=T(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)-U(\underline{q},t)$. Für die Variation der Wirkung infolge einer Variation $\delta\underline{q}(t)$ entlang einer Trajektorie $\underline{q}(t)$ mit $\delta\underline{q}(t_1)=\delta\underline{q}(t_2)=0$ ergibt sich

$$\delta S[q(t)]=\delta\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)=\int_{t_1}^{t_2} dt\ \sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+...=$$

$$=\sum_{i=1}^{f}\int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)}_{\substack{\text{Null, da } \delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0\\ \text{(nach Integration über t)}}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right]=\sum_{i=1}^{f}\int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i.$$

Postulieren wir

$$\delta S[q(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = 0$$ $\rightarrow$ <u>Hamilton´sches Variationsprinzip (1834)</u>

dann genügt die betrachtete Trajektorie $\underline{q}(t)$ den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,, i = 1,2,\ldots,f$$ $\rightarrow$ <u>Lagrange-Gleichungen II. Art</u>

Fazit: Wir haben nun die Lagrange-Gleichungen nicht aus der NBG durch Übergang zu krummlinigen Koordinaten, sondern als Folge eines neuen Postulats zur Bestimmung der Bahnkurven, des Hamilton´schen Variationsprinzips, abgeleitet.

Beachte:

(i) Die 2 f Randbedingungen $q_i(t_1)$, $q_i(t_2)$ sind äquivalent zu 2 f Anfangsbedingungen $q_i(t_1)$, $\dot{q}_i(t_1)$.

(ii) Es wird vorausgesetzt, dass alle $\delta q_i(t)$ linear unabhängig sind. Zwangbedingungen infolge von Bewegungseinschränkungen werden durch geeignete Wahl der verallgemeinerten Koordinaten q_i identisch erfüllt/eliminiert.

(iii) Angenommen, zwei Lagrange-Funktionen L und L´ unterscheiden sich lediglich durch die totale zeitliche Ableitung einer Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der Zeit

$$L'(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + \frac{d}{dt} F(\underline{q}, t) \ .$$

Dann ist

$$S'[\underline{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L'(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + \int_{t_1}^{t_2} dt\; \frac{d}{dt} F(\underline{q}, t) = S[\underline{q}(t)] + F(q_2, t_2) - F(q_1, t_1) \ .$$

Der Zusatzterm $F(q_2,t_2)-F(q_1,t_1)$ verschwindet bei Variation mit $\delta\underline{q}(t_1) = \delta\underline{q}(t_2) = 0$, d.h. aus $\delta S[\underline{q}(t)]=0$ folgt $\delta S'[\underline{q}(t)]=0$ und umgekehrt. Die auf L und L' basierenden Bewegungsgleichungen sind damit identisch, d.h., die Lagrange-Gleichungen sind invariant gegenüber Transformationen $L \to L' = L + \frac{d}{dt}F(\underline{q},t)$ mit beliebigen nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängenden Funktionen F (F darf nicht von $\underline{\dot{q}}$ abhängen, denn es gilt zwar $\delta q\big|_{t_1} = \delta q\big|_{t_1} = 0$, nicht aber $\delta\dot{q}\big|_{t_1} = \delta\dot{q}\big|_{t_1} = 0$).

Diese Invarianz lässt sich bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen ausnutzen, später wird sich erweisen, dass sie von fundamentaler Bedeutung ist (→ Eichtransformationen).

■ Freies Teilchen: $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\underline{\dot{r}}^2$

Galilei-Invarianz: $\underline{\dot{r}} \to \underline{\dot{r}}' = \underline{\dot{r}} + \underline{v}$ (v → konstante Relativgeschwindigkeit)

$$L' = \frac{m}{2}\underline{\dot{r}}^2 + m\underline{\dot{r}}\,\underline{v} + \frac{m}{2}v^2 = L + \frac{d}{dt}(m\underline{r}\,\underline{v} + \frac{1}{2}mv^2 t)$$

Den <u>konstanten</u> Term $\frac{m}{2}v^2$ kann man vorab gleich weglassen, er ist ohne Einfluss auf die BWG.

L ist eine mathematische Hilfsgröße (ähnlich den elektrodynamischen Potenzialen), keine physikalische Größe im Sinne einer Messgröße. Oft ist L die einfachste, mit den Symmetrien des Problems/Systems verträgliche Funktion der verallgemeinerten Koordinaten (die ihrerseits mit allen Zwangbedingungen vereinbar sein sollen) und Geschwindigkeiten.

■ Freies Teilchen: 3 FG $x, y, z \quad \to \quad L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$

Homogenität der Zeit → t entfällt

Homogenität des Raumes → x, y, z entfallen

Isotropie des Raumes ergibt dann insgesamt $L(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Am einfachsten $L = a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ mit a = m/2 ohne Einfluss auf BWG, da BWG invariant gegen Multiplikation von L mit einer Konstanten.

2.4 Integrale der Bewegung in der Lagrange-Mechanik

Bei der Bewegung eines mechanischen Systems ändern sich die 2f Größen $\underline{q}(t)$ und $\dot{\underline{q}}(t)$ mit der Zeit. Es existieren 2f -1 Größen $R\left(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)\right) = \text{const}$, die bei der Bewegung konstant bleiben, also nur von den Anfangsbedingungen abhängen. Sie heißen Erhaltungsgrößen oder Integrale der Bewegung. Wir haben gesehen, dass sie die Integration der Bewegungsgleichungen erleichtern können, einige von ihnen hängen mit den Symmetrien des Systems zusammen.

Wir führen zwei neue Begriffe ein. Die verallgemeinerte Koordinate q_k heißt <u>zyklisch</u>, wenn die Lagrange-Funktion L nicht von q_k abhängt, also q_k zyklisch, wenn $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$.

Wir nennen $p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$ den zu einer Koordinate q_k <u>kanonisch konjugierten Impuls</u>.

Dann haben wir folgenden Satz: Wenn q_k zyklisch, dann ist p_k Integral der Bewegung. Der Beweis ist einfach: Aus

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{folgt bei} \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{sofort} \quad \frac{d}{dt} p_k = 0, \quad \text{also} \quad p_k = \text{const}.$$

Fazit: Jede zyklische Koordinate in der Lagrange-Funktion impliziert eine Erhaltungsgröße.

- Freies Teilchen (U = 0)

$$L = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 \quad \text{unabhängig von } \underline{r}, \quad \text{also ist} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}} = m\dot{\underline{r}} = \underline{p} = \text{const} \;\rightarrow\; \text{Impulserhaltung.}$$

- Bewegung im Zentralfeld (U = U(r))

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$$

$$\varphi \text{ zyklisch}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = \text{const} \;\rightarrow\; \text{Drehimpulserhaltung}$$

Erinnere $\underline{r}(t) = r\,\underline{e}_r(t)$, $\dot{\underline{r}}(t) = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\,\dot{\vartheta}\,\underline{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$. $p_\varphi = m r^2 \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}$ ist die z-Komponente des Drehimpulses $L_z = m(\underline{r}\times\dot{\underline{r}})_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \ldots = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}$ wie sich sofort aus den Darstellungen von $\underline{r}(t)$ und $\dot{\underline{r}}(t)$ in Kugelkoordinaten ablesen oder direkt mit Hilfe der Transformationsformeln $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ verifizieren lässt.

- **Energieerhaltung**

Wir betrachten den Ausdruck $\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right) = \sum_{k=1}^{f}\left[\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{\frac{\partial L}{\partial q_k}}\dot{q}_k + \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k - \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k}\right] - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$\rightarrow$ wenn L nicht explizit zeitabhängig, dann ist $\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$ Integral der Bewegung.

Wir werden nun zeigen, dass die Größe $\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$ die Energie des mechanischen Systems darstellt. Dazu nehmen wir (der Einfachheit halber) an, dass die Transformation von kartesischen auf verallgemeinerte Koordinaten $x_n = x_n(\underline{q})$ nicht explizit von der Zeit abhängt und die potenzielle Energie nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängt

$$\frac{\partial x_n}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0,\ k = 1,2,\ldots,f.$$

Wir haben

$$\frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n = \sum_{i=1}^{f}\frac{\partial x_n}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$T(\underline{q},\underline{\dot{q}}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{i,j=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{k,j=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{k,i=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T.$$

Unter Berücksichtigung von $L = T - U$ folgt

$$\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - (T-U) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}}_{=0} \dot{q}_k - T + U = 2T - T + U = T + U$$

$$\rightarrow \quad \underline{E = T(\underline{q},\underline{\dot{q}}) + U(\underline{q}) = \text{const}}, \quad \text{wenn} \quad \underline{\frac{\partial L}{\partial t} = 0}.$$