- **Poisson´sches Theorem, „Konstruktion“ von Erhaltungsgrößen**

Eine durch die Funktion $\underline{F(\underline{p},\underline{q},t)}$ (der verallgemeinerten Impulse, Koordinaten und der Zeit) gegebene physikalische Größe ist ein Integral der Bewegung, wenn $\frac{dF}{dt}=0$, also wenn

$$\underline{\frac{\partial F}{\partial t}=-\{F,H\}=\{H,F\}}$$

gilt. Damit eine nicht explizit von der Zeit abhängige physikalische Größe $F(\underline{p},\underline{q})$ Integral der Bewegung ist, muss also ihre Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion des betrachteten physikalischen Systems verschwinden.

■ In einem physikalischen Systems mit nicht explizit zeitabhängiger Hamilton-Funktion $H=H(\underline{p},\underline{q})$ ist diese, wie wir wissen, ein Integral der Bewegung: $H(\underline{p},\underline{q})=E=\text{const}$ (Energieerhaltung). Das folgt nun direkt aus $\frac{dH}{dt}=\{H,H\}+0=0$

<u>Poisson´sches Theorem</u>: Aus $\frac{dF}{dt}=0$ und $\frac{dG}{dt}=0$ folgt $\frac{d}{dt}\{F,G\}=0$.

<u>Beweis</u>: Nach Voraussetzung ist $\frac{\partial F}{\partial t}=\{H,F\}$ und $\frac{\partial G}{\partial t}=-\{G,H\}$. Eingesetzt in die Jacobi-Identität folgt

$$0=\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}+\{H,\{F,G\}\}=-\left\{F,\frac{\partial G}{\partial t}\right\}-\left\{\frac{\partial F}{\partial t},G\right\}+\{H,\{F,G\}\}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\{F,G\}-\{\{F,G\},H\}=-\frac{d}{dt}\{F,G\}.$$

Der Poisson´sche Satz ist nützlich für die Konstruktion neuer Erhaltungsgrößen. Allerdings ergeben sich bei seiner Anwendung mitunter Konstanten oder das „neue“ Bewegungsintegral $\{F,G\}$ erweist sich Funktion der „alten“ F und G. Deshalb greift eine Interpretation des Satzes im Sinne von: „Die aus zwei Bewegungsintegralen gebildete Poisson-Klammer ist ebenfalls Integral der Bewegung“ zu kurz.

<u>Einschub</u>: Übergang zwischen klassischer Mechanik (KM) und Quantenmechanik (QM)

Auffällig ist die formale Ähnlichkeit zwischen den Relationen

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \text{ und } [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij},$$

also zwischen den Poisson-Klammern der kanonischen Variablen q_i und p_i in der KM und den Vertauschungsrelationen des Orts- und Impulsoperators in der QM, die wir im kommenden Semester ausführlich behandeln werden. Hier konstatieren wir zunächst lediglich einige Korrespondenzen (↔) zwischen KM (links) und QM (rechts):

- Messbare physikalische Größe (Observable)

$$F(\underline{p}, \underline{q}, t) \quad \leftrightarrow \quad \hat{F} = F(\underline{\hat{p}}, \underline{\hat{q}}, t)$$

Phasenraumfunktion ↔ hermitescher linearer Operator

- Poisson-Klammer $\{F, G\}$ ↔ $\frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{G}]$ Kommutator

- klassische Bewegungsgleichung für F im Hamilton-Formalismus ↔ Bewegungsgleichung für Operatoren in/im Heisenberg-Darstellung/Bild der QM

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad \leftrightarrow \quad \frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \quad ,$$

mit der Hamilton-Funktion $H(\underline{p}, \underline{q}, t)$ ↔ mit dem Hamilton-Operator $\hat{H} = H(\underline{\hat{p}}, \underline{\hat{q}}, t)$.

Wir werden sehen, dass die Eigenschaften bzw. Axiome (i) – (v) für $\{F, G\}$ auch für die Kommutatoren $[\hat{F}, \hat{G}]$ gelten. In diesem Sinne sind KM und QM unterschiedliche Realisierungen der gleichen durch (i) – (v) gegebenen mathematischen Struktur.

3.5 Kanonische Transformationen

- **Motivation**

Lagrange II: Die Lagrange-Funktion hängt von den verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q}$ und den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\underline{\dot{q}} = \frac{d\underline{q}}{dt}$ ab, $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$. Die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \; i = 1, \ldots, f$$

sind invariant gegen f Koordinatentransformationen $q_i(t) \rightarrow Q_i = Q_i(\underline{q}, t)$ *), bei denen

$$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \rightarrow \tilde{L}(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t) \text{ und } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_i} = 0, \; i = 1, \ldots, f \; .$$

*) Das sind Punkttransformationen. Wenn $\det\left(\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_i \partial q_j}\right) \neq 0$ und die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung stetig, sind diese Transformationen umkehrbar eindeutig, also Diffeomorphismen.)

Hamilton: Wir verwenden die kanonischen Koordinaten $\underline{q}$ und die kanonischen Impulse $\underline{p}$

$$H(\underline{p}, \underline{q}, t) = \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t), \; p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(\underline{q}, \underline{p}, t)$$

. Auch die Hamilton´schen Bewegungsgleichungen $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$, $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ sind invariant unter Koordinatentransformationen $\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, t)$. Im Hamilton-Formalismus können wir jedoch eine erweiterte Klasse von 2f Transformationen der $\underline{q}$ und $\underline{p}$ betrachten, da $\underline{p}$ und $\underline{q}$ gleichberechtigte, <u>voneinander unabhängige</u> Variablen sind. Diese Erweiterung der Klasse möglicher Transformationen ist ein wesentlicher Vorteil der Hamilton´schen Formulierung der klassischen Mechanik.

Frage: Für welche Transformationen $Q_i = Q_i(\underline{p}, \underline{q}, t)$, $P_i = P_i(\underline{p}, \underline{q}, t)$ kanonischer Variabler

$\underline{p}, \underline{q}$ (d.h. $\dot{p}_i = -\frac{\partial H(\underline{p}, \underline{q}, t)}{\partial q_i}$, $\dot{q}_k = \frac{\partial H(\underline{p}, \underline{q}, t)}{\partial p_k}$, gilt

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \widetilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t)}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial \widetilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t)}{\partial P_i} \; ?$$

Die gesuchten Transformationen überführen kanonische Variable in neue kanonische Variable und heißen deshalb kanonische Transformationen (KT). Es handelt sich um diffeomorphe Abbildungen der Phasenraumkoordinaten, die die Hamilton´schen Bewegungsgleichungen forminvariant lassen.

- **Die erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation**

Die Hamilton´schen Bewegungsgleichungen für $\underline{p}, \underline{q}$ waren Folge des Hamilton´schen Variationsprinzips

$$\delta S[\underline{p}, \underline{q}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underline{p}, \underline{q}, t) \right] = 0 , \qquad \text{(H1)}$$

vgl. Kap. 3.3. Analog ergeben sich die Gleichungen $\dot{P}_i = -\frac{\partial \widetilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t)}{\partial Q_i}$, $\dot{Q}_i = \frac{\partial \widetilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t)}{\partial P_i}$ aus der Forderung

$$\delta \widetilde{S}[\underline{P}, \underline{Q}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - \widetilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t) \right] = 0 . \qquad \text{(H2)}$$

Behauptung: (H1) und (H2) sind äquivalent, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underline{p}, \underline{q}, t) = \sum_{i=1}^{f} P_i \, \dot{Q}_i - \widetilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t) + \frac{dF(\underline{q}, \underline{Q}, t)}{dt} \qquad \text{(H3)}$$

d.h. $$dF = \sum_{i=1}^{f} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{f} P_i \, dQ_i + (\, \widetilde{H} - H \,) \, dt \, . \qquad \text{(H4)}$$

Dabei ist F eine beliebige Funktion von $\underline{q}$, $\underline{Q}$ und t. Sie heißt **Erzeugende der kanonischen Transformation** $Q_i = Q_i(\underline{p}, \underline{q}, t)$, $P_i = P_i(\underline{p}, \underline{q}, t)$. Wegen $F = F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$ haben wir

$dF = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} dt$ und durch Vergleich mit (H3) folgt

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \, , \quad P_i = - \frac{\partial F}{\partial Q_i} \, , \quad \widetilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} \, . \qquad \text{(H5)}$$

Beweis: Wir haben behauptet, dass aus (H1) – H(3) $\dot{P}_i = - \frac{\partial \widetilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t)}{\partial Q_i}$, $\dot{Q}_i = \frac{\partial \widetilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t)}{\partial P_i}$ folgt, die durch $F = F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$ vermittelte Transformation $Q_i = Q_i(\underline{p}, \underline{q}, t)$, $P_i = P_i(\underline{p}, \underline{q}, t)$ also kanonisch ist. Diese Behauptung ist richtig, denn

$$0 = \delta S[\underline{p}, \underline{q}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underline{p}, \underline{q}, t) \right] =$$

$$\overset{(H3)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \; \delta \left[\sum_{i=1}^{f} P_i \, \dot{Q}_i - \widetilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t) \right] + \delta \left[F\big(\underline{q}(t_2), \underline{Q}(t_2), t_2\big) - F\big(\underline{q}(t_1), \underline{Q}(t_1), t_1\big) \right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \sum_{i=1}^{f} \left(\delta P_i \, \dot{Q}_i + \underbrace{P_i \, \delta \dot{Q}_i}_{P_i \, \delta Q_i \big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \, \dot{P}_i \, \delta Q_i} - \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_i} \delta Q_i - \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_i} \delta P_i \right) + \sum_{i=1}^{f} \left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2}}_{\delta q_i |_{t_1}^{t_2} = 0} + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \delta Q_i \bigg|_{t_1}^{t_2} \right) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \sum_{i=1}^{f} \left[\left(\dot{Q}_i - \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_i} \right) \delta P_i - \left(\dot{P}_i + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_i} \right) \delta Q_i \right] + \sum_{i=1}^{f} \left(P_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \right) \delta Q_i \bigg|_{t_1}^{t_2} \; .$$

Der letzte Term verschwindet wegen (H5). Also müssen die Gleichungen

$\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}$, $\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}$ gelten, um $\delta S[\underline{p}, \underline{q}] = 0$ für <u>beliebige, unabhängige</u> δQ_i, δP_i erfüllen zu können. Der "Korrekturterm" $\frac{dF(\underline{q}, \underline{Q}, t)}{dt}$ in (H3) sichert, dass die Transformation kanonisch ist.

Man beachte die Analogie zu der früher bewiesenen Tatsache, dass $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ und $\tilde{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + \frac{dF(\underline{q}, t)}{dt}$ zu äquivalenten Lagrange-Gleichungen II. Art führen.

<u>Wichtig</u>: Die erzeugende Funktion $F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$ legt die kanonische Transformation eindeutig fest:

<u>"Hin"</u>-Transformation $(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\underline{P}, \underline{Q})$:

$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$ gibt $p_i = p_i(\underline{q}, \underline{Q}, t)$, nach Inversion also $\underline{Q_i = Q_i(\underline{p}, \underline{q}, t)}$ *). Analog liefert

$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}$ uns $P_i = P_i(\underline{q}, \underline{Q}, t)$ und unter Berücksichtigung von *) $\underline{P_i = P_i(\underline{p}, \underline{q}, t)}$.

<u>"Rück"</u>-Transformation $(\underline{P}, \underline{Q}) \rightarrow (\underline{p}, \underline{q})$:

Aus $P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}$ folgt $P_i = P_i(\underline{q}, \underline{Q}, t)$, die inverse Funktion ist $\underline{q_i = q_i(\underline{P}, \underline{Q}, t)}$.

Das eingesetzt in $p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$, also in $p_i = p_i(\underline{q}, \underline{Q}, t)$, gibt $\underline{P_i = P_i(\underline{P}, \underline{Q}, t)}$.

Eine zentrale Motivation für kanonische Transformationen ist die „Erzeugung" von zyklischen Variablen, also die „Konstruktion" von Integralen der Bewegung.

Lagrange II: Wenn q_i zyklisch, also $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, dann ist $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ wegen $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$ ein Integral der Bewegung. Trotzdem muss die entsprechende verallgemeinerte Geschwindigkeit $\dot{q}_i$ weiterhin als Variable in der Lagrange-Funktion „mitgeschleppt" werden; die Zahl der Freiheitsgrade vermindert sich nicht. Anders im Hamilton-Formalismus:

Hamilton: Wenn q_i zyklisch, also $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$, dann ist $\dot{p}_i = 0$ und $p_i = \text{const} =: \alpha_i$. Aber in der Hamilton-Funktion $H(q_1,...,q_{i-1},q_{i+1},...q_f,p_1,...,p_{i-1},\alpha_i,p_{i+1},...,p_f)$ treten nun weder q_i noch p_i auf, da p_i durch die Konstante α_i ersetzt werden kann. Die Zahl der Freiheitsgrade reduziert sich von f auf f - 1.

Idee: „Löse" die Hamilton´schen Bewegungsgleichungen, indem über geeignete kanonische Transformationen schrittweise neue zyklische Variable erzeugt werden, bis alle neuen verallgemeinerten Koordinaten Q_i zyklisch sind. Gelänge das, wäre das Bewegungsproblem gelöst, denn wir hätten

$$\tilde{H} = \tilde{H}(P_1, P_2, ..., P_f, t) \quad \text{mit} \quad P_i = \text{const} =: \alpha_i \text{, also } \dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = f(t)$$

und damit

$$Q_i(t) = \int_{t_0}^{t_1} f(t')dt' + ß_i \, .$$

Die Konstanten α_i und β_i werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

■ Dieses Verfahren wird in der Übung am Beispiel des harmonischen Oszillators erprobt. In diesem Fall überführt die durch $F(q,Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \mathrm{ctg} Q$ vermittelte KT die Hamilton Funktion

$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$ in $\widetilde{H} = ... = \omega P$. Es ergibt sich die harmonische Schwingung

$$q(t) \overset{(A)}{=} \sqrt{\frac{2}{m\omega} P} \sin Q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta), \; p(t) = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = \sqrt{2m\omega\alpha} \cos(\omega t + \beta).$$

<u>Bemerkungen:</u>

(i) Die KT $Q_i = Q_i(\underline{p}, \underline{q}, t)$, $P_i = P_i(\underline{p}, \underline{q}, t)$ verknüpft die neuen Koordinaten und Impulse sowohl mit $\underline{p}$ als auch mit $\underline{q}$. Durch diese "Durchmischung" geht der ursprüngliche Sinn der Begriffe verallgemeinerte <u>Koordinate</u> und verallgemeinerter <u>Impuls</u> u.U. verloren. Den Extremfall stellt eine KT mit der Erzeugenden $F(q,Q) = \sum_{i=1}^{f} q_i Q_i$ dar, denn dann ist

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{und} \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} = -q_i.$$

Aus den "alten" Impulsen werden die "neuen" Koordinaten und aus den "alten" Koordinaten die (negativen) "neuen" Impulse: Die betrachtete KT nennt die Variablen lediglich um.

(ii) Die Poisson-Klammern sind invariant unter kanonischen Transformationen:

$$\{F,G\}_{\underline{p},\underline{q}} = \{F,G\}_{\underline{P},\underline{Q}}.$$

(Beweis siehe z.B. L^2, S. 179). Dieses Ergebnis unterstreicht erneut, dass die Hamilton´schen Bewegungsgleichungen $\dot{q}_i = \{q_i, H\}$, $\dot{p}_i = \{p_i, H\}$ ihre Form unter KT nicht ändern

(iii) Die Änderung von $\underline{p}(t)$ und $\underline{q}(t)$ entlang einer Trajektorie im Phasenraum kann selbst als KT aufgefasst werden

$$\underline{p}(t+\tau) = \underline{p}(t; \underbrace{\underline{p}(t), \underline{q}(t)}_{\text{"Anfangsbed."}}), \; \underline{q}(t+\tau) = \underline{p}(t; \underbrace{\underline{p}(t), \underline{q}(t)}_{\text{"Anfangsbed."}}).$$

Die Transformation $\left(\underline{p}(t), \underline{q}(t)\right) \to \left(\underline{p}(t+\tau), \underline{q}(t+\tau)\right)$ ist kanonisch (L^2, S. 179)

3.6 Die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$\rightarrow$ Vollendung der klassischen Punktmechanik.

Idee: Versuche durch eine kanonische Transformation $\underline{p}, \underline{q} \overset{KT}{\rightarrow} (\underline{P}, \underline{Q})$ zu erreichen, dass die transformierte Hamilton-Funktion identisch Null ist, also $\widetilde{H}(\underline{P},\underline{Q},t) \equiv 0$ gilt. Dann wäre

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \widetilde{H}(\underline{P},\underline{Q},t)}{\partial Q_i} = 0 \quad \text{also} \quad P_i = \alpha_i = \text{const} \quad \text{und} \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial \widetilde{H}(\underline{P},\underline{Q},t)}{\partial P_i} = 0 \quad \text{also} \quad Q_i = \beta_i = \text{const}$$

d.h., alle verallgemeinerten Koordinaten wären zyklisch.

Um diese Idee zu verwirklichen, betrachten wir eine Erzeugende $G(\underline{q},\underline{P},t)$ der unabhängigen Variablen $\underline{q}$ und $\underline{P}$. Diese gewinnen wir aus $F(\underline{q},\underline{Q},t)$, indem wir $\underline{Q}$ zugunsten von P eliminieren. Wegen $P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}$ wird G durch Legendre-Transformation aus F konstruiert

$$G = F - \sum_{i=1}^{f} Q_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} = F + \sum_{i=1}^{f} Q_i P_i \; .$$

Wir finden mit $dF = \sum_{i=1}^{f} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{f} P_i \, dQ_i + (H - \widetilde{H}) dt$ (vgl. (H4), Kap. 3.5)

$$dG = dF + \sum_{i=1}^{f} (P_i \, dQ_i + Q_i dP_i) = \sum_{i=1}^{f} (p_i \, dq_i + Q_i dP_i) + (\widetilde{H} - H) dt$$

also

$$\underline{p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}, \; Q_i = \frac{\partial G}{\partial P_i}, \; \widetilde{H} = H + \frac{\partial G}{\partial t}} \quad .$$

Die Forderung $\widetilde{H}(\underline{P},\underline{Q},t) \equiv 0$ führt unter Berücksichtigung von $p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}$ auf die Gleichung

$$\underline{H\left(q, \frac{\partial G}{\partial \underline{q}}, t\right) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0}$$

für die Erzeugende G. Ist G berechnet ergeben, sich die gesuchten Bahnkurven über

$$Q_i = \frac{\partial G(\underline{q}, \underline{P}, t)}{\partial P_i} = Q_i(\underline{q}, \overset{\overset{\underline{\alpha}}{\downarrow}}{\underline{P}}, t) = \beta_i \ ,$$

denn das bedeutet $q_i(t) = q_i(t; \underline{\alpha}, \underline{\beta})$.

Die verallgemeinerten Impulse $p_i(t) = p_i(t; \underline{\alpha}, \underline{\beta})$ finden wir aus $p_i = \frac{\partial G(\underline{q}, \underline{P}, t)}{\partial q_i} = p_i(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)$;

wenn wir für q_i die gerade gefundene Relation $q_i(t) = q_i(t; \underline{\alpha}, \underline{\beta})$ verwenden.

■ Sehr einfaches Beispiel: Bewegung eines freien Teilchen in x-Richtung

$$G = G(x, P, t), \ H = \frac{p^2}{2m}, \ \text{mit} \ p = \frac{\partial G}{\partial x} \quad \text{folgt} \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial G}{\partial t} = 0.$$

Lösung: $G = x\alpha - \frac{\alpha^2}{2m} t, \ \alpha = P = \text{const}$, damit $\widetilde{H} = H + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\alpha^2}{2m} - \frac{\alpha^2}{2m} \equiv 0.$

Die "neue Koordinate" ist $Q = \frac{\partial G}{\partial p} = x - \frac{\alpha}{m} t = \text{const} = \beta =: x_0$. Umkehrung gibt

$x(t) = x_0 + \frac{\alpha}{m} t$, also die erwartete geradlinig gleichförmige Bewegung mit konstanter

Geschwindigkeit $v = \frac{\alpha}{m}$. Der Impuls p ist konstant, $p = \frac{\partial G(x, P, t)}{\partial x} = \alpha$.

Bemerkung: Über Legendre-Transformation $R(\underline{p},\underline{Q},t) = F - \sum_{i=1}^{f} p_i\, q_i$ lässt sich eine erzeugende Funktion $R(\underline{p},\underline{Q},t)$ der unabhängigen Variablen $\underline{p},\underline{Q}$ und t konstruieren, für die wir leicht die Relationen $P_i = -\frac{\partial R}{\partial Q_i},\; q_i = \frac{\partial R}{\partial p_i},\; \tilde{H} = H + \frac{\partial R}{\partial t}$ verifizieren. Als letzten Fall (unabhängige Variablen $\underline{p},\underline{P}$) haben wir $V(\underline{p},\underline{P},t) = G + \sum_{i=1}^{f} P_i\, Q_i$ mit

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial P_i},\; q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i},\; \tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

- <u>Behauptung</u>: Entlang der (noch unbekannten) Bahnkurve stimmt die erzeugende Funktion G mit der Wirkung $S(t) = \int_{t_0}^{t} dt'\, L(t')$ überein.

<u>Beweis</u>: Wir zeigen, dass $\frac{dG}{dt} = L(t)$ <u>entlang der Bahnkurve</u>

$$\frac{dG(\underline{q},\underline{P},t)}{dt} = \sum_{i=1}^{f}\left(\underbrace{\frac{\partial G}{\partial q_i}}_{p_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G}{\partial P_i}\underbrace{\dot{P}_i}_{0^{1)}}\right) + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}}_{-H,\ \text{da}\ \tilde{H}=0} = \sum_{i=1}^{f} p_i\, \dot{q}_i - H = L\,.$$

1) An dieser Stelle wird $\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} = 0$, verwendet, also entlang der Bahnkurve gerechnet.

FAZIT: Entlang der gesuchten Bahnkurve ist $G \equiv S$ und S Lösung der → **Hamilton-Jacobi-Gleichung** (HJG)

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial \underline{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Die HJG ist eine <u>nichtlineare</u> PDE für eine Funktion von f unabhängigen Variablen q_i. Aus dem vollständigen Integral $S(\underline{q},\underline{\alpha},t)$ mit den f Konstanten α_i lassen sich die gesuchten

Bahnkurven des durch $H(\underline{p},\underline{q},t)$ charakterisierten physikalischen/mechanischen Systems bestimmen. Damit ist die HJG äquivalent zu den kanonischen Gleichungen (2f ODE)

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(\underline{p},\underline{q},t)}{\partial q_i}, \ \dot{q}_i = \frac{\partial H(\underline{p},\underline{q},t)}{\partial p_i}.$$

Die Relation $S(t) = \int_{t_0}^{t} dt' \, L(t')$ hilft nicht bei der Berechnung von G oder S, da L als Funktion der gesuchten Bahnkurve benötigt würde, also $L(t) = L(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t)$, aber $\underline{q}(t)$ eben nicht bekannt ist.

Ist die Hamilton-Funktion H nicht explizit zeitabhängig, führt der Separationsansatz

$$S(\underline{q},\underline{\alpha},t) = W(\underline{q},\underline{\alpha}) + V(t) \qquad \text{auf} \qquad H\left(\underline{q}, \frac{\partial W}{\partial \underline{q}}\right) = -\frac{dV}{dt} = \text{const} =: E\,.$$

Die linke Seite der Gleichung hängt nur von den q_i, die rechte nur von t ab; beide Seiten müssen also konstant sein. Damit folgt in diesem Fall

$$S(\underline{q},\underline{\alpha},t) = W(\underline{q},\underline{\alpha}) - E\,t\,, \qquad H\left(\underline{q}, \frac{\partial W}{\partial \underline{q}}\right) = E$$

und die Separationskonstante E ist nichts anderes als die im Fall $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ zeitlich konstante Energie des mechanischen Systems.