(i) Coriolis-Kraft: $\underline{F}_C = -2\,m\,\underline{\omega}\times\underline{\dot{r}}'$

Die Coriolis-Kraft wirkt nur auf MP/Körper, die sich bezüglich des rotierenden BS/NIS bewegen, also nur dann, wenn $\underline{\dot{r}}' \neq 0$ und wenn $\underline{\omega}$ und $\underline{\dot{r}}'$ nicht die gleiche Wirkungslinie besitzen.

■ Wirbel in Hoch- und Tiefdruckgebieten auf der Nord- bzw. Südhalbkugel

Nordhalbkugel	Südhalbkugel
Abweichung nach "rechts" von $\underline{\dot{r}}'$	Abweichung nach "links" von $\underline{\dot{r}}'$
(Steuerbord)	(Backbord)

Skizze

■ Foucault´sches Pendel ($\rightarrow$ Projekt)

Drehung der Schwingungsebene eines Fadenpendels, die an den Polen maximal, am Äquator Null ist.

(ii) Trägheitskraft infolge Winkelbeschleunigung: $\underline{F}_\omega = -m\,\underline{\dot{\omega}}\times\underline{r}'$

$\rightarrow$ nur wirksam, falls $\underline{\omega}$ zeitabhängig …

(iii) Zentrifugalkraft: $\underline{F}_Z = -m\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') \begin{cases} \text{Richtung } \perp \text{ von Drehachse weg} \\ \text{Betrag } F_Z = m\,\omega^2 r' \sin(\angle(\underline{r}',\underline{\omega})) \end{cases}$

Unter Verwendung von $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$ für das doppelte Vektorprodukt (vgl. MMP) folgt über $\underline{F}_Z = -m[\underline{\omega}(\underline{\omega}\cdot\underline{r}') - \underline{r}'(\underline{\omega}\cdot\underline{\omega})]$ und Ausklammern von ω^2

$$F_Z{}^2 = (m\omega^2)^2\left[\underline{r}' - \frac{\underline{\omega}}{\omega}\left(\frac{\underline{\omega}}{\omega}\cdot\underline{r}'\right)\right]^2 =$$

$$(m\omega^2)^2\left[\underline{r}'^2 - \frac{2\,\underline{r}'\cdot\underline{\omega}}{\omega}\left(\frac{\underline{\omega}}{\omega}\cdot\underline{r}'\right) + \frac{\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}}{\omega^2}\left(\frac{\underline{\omega}}{\omega}\cdot\underline{r}'\right)^2\right] =$$

$$= (m\omega^2)^2\left[\underline{r}'^2 - \left(\frac{\underline{r}'\cdot\underline{\omega}}{\omega}\right)^2\right] \underset{\text{vgl. Skizze}}{=} (m\omega^2)^2\,\underline{r}'^2 \sin^2(\angle(\underline{r}',\underline{\omega}))$$

Skizze

Stehen Drehachse und Geschwindigkeit im NIS senkrecht aufeinander ($\underline{\omega}\perp\underline{r}'$) ergibt sich der vertraute Ausdruck für den Betrag der Zentrifugalkraft

$$F_Z = m\,\omega^2 r' = m\frac{v'^2}{r'}\,.$$

- Erdabplattung

- Abhängigkeit der Erdbeschleunigung vom Breitengrad

■ Bewegungen auf der rotierenden Erde

Wir betrachten ein kartesisches Koordinatensystem (KS) Σ' mit Ursprung in einem Punkt auf der Erdoberfläche unter der geografischen Breite α. Die z'-Achse zeigt radial vom Erdmittelpunkt weg, y'- und x'-Achse sind nach Norden bzw. Osten gerichtet. Auf Grund der Erdrotation ist Σ' ein Nichtinertialsystem (NIS). Den Ursprung des KS Σ legen wir in den Erdmittelpunkt. Σ soll nicht an der Erdrotation teilnehmen und wird (unter Vernachlässigung der Bewegung der Erde um die Sonne usw.) als IS angesehen. $\underline{r}_0$ bezeichnet den Ortsvektor des Koordinatenursprungs von Σ' in Σ.

Geometrisch erkennen wir sofort:

$\underline{\omega} = \omega \cos\varphi \, \underline{e}'_y + \omega \sin\varphi \, \underline{e}'_z$, wobei $\omega = \dfrac{2\pi}{24\,\mathrm{h}} \approx 7{,}27 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$, und $\underline{e}'_r = -\sin\alpha \, \underline{e}'_y + \cos\alpha \, \underline{e}'_z$.

Der Winkel α gibt die geografische Breite an.

<u>Wie lauten die Bewegungsgleichungen eines MP im NIS ?</u>

Vom Nordpol aus gesehen (Draufsicht, Skizze rechts) erkennen wir, dass der Ursprung von Σ' sich auf einem Kreis mit dem konstanten Radius $R \cos \alpha$ bewegt. Aus dem allgemeinen Ausdruck für die Beschleunigung in ebenen Polarkoordinaten (vgl. Kap. 1.3)

$$\underline{a}(t) = (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\, \underline{e}_r + (r\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi})\, \underline{e}_\varphi$$

(Winkel φ nicht mit geografischer α Breite verwechseln!) folgt mit $r = R \cos \alpha = \mathrm{const}$ und $\dot{\varphi} = \omega = \mathrm{const}$, also $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = 0$ für die Beschleunigung von Σ' bzgl. Σ (also für die Beschleunigung $\ddot{\underline{r}}_0$ des Koordinatenursprungs von Σ' relativ zu einem im Erdmittelpunkt ruhenden Σ)

$$\ddot{\underline{r}}_0 = -r\,\dot{\varphi}^2\, \underline{e}'_r = R\,\omega^2 \cos\alpha \,(\sin\alpha\, \underline{e}'_y - \cos\alpha\, \underline{e}'_z)$$

Annahme: Ab jetzt sollen Bewegungen nahe der Erdoberfläche beschrieben werden; der Abstand von der Erdoberfläche r' (ohne Vektor) sei also klein. Zusätzlich wollen wir Terme der Ordnung $O(\omega^2)$ vernachlässigen.

Unter diesen Näherungen ist die Zentrifugalkraft $\underline{F}_Z = -m\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}')$ vernachlässigbar und wir erhalten für die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\underline{r}}' = \underbrace{m\underline{g} - m\ddot{\underline{r}}_0}_{\substack{\text{Erdbeschleunigung auf Körper}\\ \text{nahe Erdoberfläche infolge von}\\ \text{Gravitation und Erdrotation}}} \underbrace{-2m\,\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}'}_{\text{Coriolis-Kraft}}$$

Aus der rechten Seite ergibt sich die Fallbeschleunigung in der Nähe der Erdoberfläche, die wegen der Coriolis-Kraft von der Lotrechten abweicht. Für die in Σ' gemessene $\rightarrow$ "wahre" Erdbeschleunigung $\underline{g}_{res}$ folgt

$$\underline{g}_{res} = \underline{g} + \ddot{\underline{r}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ R\,\omega^2 \cos\alpha \sin\alpha \\ g - R\,\omega^2 \cos^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Skizze

Der von $\ddot{\underline{r}}_0$ stammende Anteil in g_{res} ist für die Erdabplattung verantwortlich: Die heutige Gestalt der Erde zeigt in erstarrter Form den rotierenden Planeten, dessen (ehemals flüssige) Oberfläche sich senkrecht zu g_{res} eingestellt und so die abgeplattete Erdkugel (abgeplatteter Rotationsellipsoid $\rightarrow$ Geoid) entstehen lassen hat. Der polare Erdradius ist etwa 21,5 km geringer als der Erdradius am Äquator.

Die Normale zur realen Erdoberfläche zeigt in Richtung - g_{res} und die Erdbeschleunigung unterscheidet sich je nach geographischer Breite von der Fallbeschleunigung

$$g_n(\alpha) = (9{,}832 - 0{,}052\cos^2\alpha)\,\mathrm{m\,s^{-2}} \quad \text{mit} \quad g_n(45^\circ) \approx 9{,}80665\ \mathrm{m\,s^{-2}} \text{ (in Meereshöhe).}$$

Am Äquator ist der zu $\cos^2\alpha$ proportionale Korrekturterm maximal, die Abweichung beträgt etwa 5 ‰. Deshalb geht eine Pendeluhr am Äquator täglich 3 ½ Minuten gegenüber einer identischen Uhr an den Polen nach.

Nun orientieren wir NIS Σ' so, dass die z'-Achse ⊥ auf der realen Erdoberfläche steht. Dann hat $m\underline{g} - m\ddot{\underline{r}}_0$ nur eine Komponente m g_{res} in Richtung von e_z'. Die Coriolis-Kraft kann in guter Näherung aus

$$\underline{F}_c = 2m\,\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}' \approx -2m\begin{vmatrix} \underline{e}'_x & \underline{e}'_y & \underline{e}'_z \\ 0 & \omega\cos\alpha & \omega\sin\alpha \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} = -2m\begin{pmatrix} \dot{z}'\omega\cos\alpha - \dot{y}'\omega\sin\alpha \\ \dot{x}'\omega\sin\alpha \\ -\dot{x}'\omega\cos\alpha \end{pmatrix}$$

übernommen werden, da g und g_{res} nur einen kleinen Winkel miteinander bilden (die Erdabplattung ist gering und der Winkel zwischen der Richtung zum Ermittelpunkt und der Normalen zur Erdoberfläche klein).

Zur Bestimmung der Bahnkurve eines Körper/MP nahe der Erdoberfläche sind dann folgende genäherte Bewegungsgleichungen zu lösen (mit zusätzlicher eingeprägter Kraft F'):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= F'_x - 2m\omega\,(\dot{z}'\cos\alpha - \dot{y}'\sin\alpha) \\ m\ddot{y}' &= F'_y - 2m\omega\,\dot{x}'\sin\alpha \\ m\ddot{z}' &= F'_z - m\,g_{res} + 2m\omega\,\dot{x}'\cos\alpha \end{aligned}$$

(vgl. drittes Übungsblatt)

Skizze

1.4.4 Grundgesetz der Drehbewegung in der Newton´schen Mechanik

Wir definieren den Drehimpuls $\underline{L}$ und das Drehmoment $\underline{M}$ gemäß

Def.: $\underline{L} = \underline{r}\times\underline{p} = m\,\underline{r}\times\dot{\underline{r}}$ und $\underline{M} = \underline{r}\times\underline{F}$.

Unter Verwendung der NBG $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$ folgt $\underline{r}\times\underline{F} = \underline{r}\times\frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\underline{r}\times\underline{p}) - \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}\times\underline{p}}_{\dot{\underline{r}}\times m\dot{\underline{r}} = 0} = \frac{d}{dt}(\underline{r}\times\underline{p})$

also

$$\underline{M} = \frac{d\underline{L}}{dt} \qquad \rightarrow \text{ Grundgesetz der Drehbewegung in der Newton´schen Mechanik}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem resultierenden wirkenden Drehmoment.

Wir kommen darauf im Kapitel über die Dynamik starrer Körper, der Kreisel usw. zurück.

1.4.5 III. Newton´sches Axiom
(actio et reactio, Reaktions- oder Wechselwirkungsprinzip, Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung)

Die von zwei Körpern aufeinander ausgeübten Wirkungen (→ Kräfte und /oder Momente) sind stets betragsmäßig gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

■ Gewicht und Auflagedruck einer Kugel

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$$

Skizze

■ Vergleiche die trägen Massen zweier Körper durch Messung der Beschleunigungen, die ihnen durch betragsmäßig gleichgroße, entgegengesetzt gerichtete Kräfte verliehen werden.

Mögliche Realisierung: Gespannte Feder (alle anderen Einflüsse seien vernachlässigbar)

Skizze

Wird die gespannte Feder durchtrennt, liefert die Messung der Beschleunigungen <u>unabhängig von der Größe der Kraft</u> $F = F_1 = F_2$ das Ergebnis

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2} \; .$$

Erneut erkennen wir, dass die träge Masse Eigenschaft eines Körpers unabhängig von der wirkenden Kraft ist.

1.4.6 Superpositionsprinzip der Kräfte

Wirken auf einen Massepunkt mehrere Kräfte $\underline{F}_i$, bewegt er sich so, als wirke auf ihn allein die vektorielle Summe

$$\underline{F} = \sum_i \underline{F}_i \,.$$

Analog gilt

$$\underline{M} = \sum_i \underline{M}_i \,.$$

■ Kräfteparallelogramm

Skizze

1.4.7 Newton'sches Gravitationsgesetz

Eine (Punkt)Masse m_1 am Ort $\underline{r}_1$ übt auf die (Punkt)Masse m_2 am Ort $\underline{r}_2$ die Kraft

$$\underline{F}_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} (\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

Skizze

aus. Hier bezeichnet $\gamma = 6{,}67259\ 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$ die universelle Gravitationskonstante.

Die Gravitationskraft ist anziehend und wirkt in Richtung der Verbindungslinie beider Massen. Ihr Betrag hängt nur vom Abstand der Punktmassen ab. Außerdem präsentiert sich die gravitative Wechselwirkung als universell, langreichweitig, nicht abschirmbar und, im Vergleich zur elektrostatischen Wechselwirkung, „schwach". Für zwei ruhende Elektronen ergibt sich beispielsweise unabhängig vom Abstand

$$\frac{\text{gravitative Anziehung}}{\text{elektrostatische Abstoßung}} \approx \frac{1}{4{,}17} 10^{-4} \,.$$

(nachprüfen). Dennoch dominiert im astronomischen Maßstab die Gravitation, da die kosmischen Objekte in der Regel elektrisch neutral sind.

• Messung des Gewichts eines Probekörpers nahe der Erdoberfläche mit einer Federwaage

Skizze

Der Betrag der auf den aufgehängten Probekörper wirkenden Schwerkraft kann aus der Verlängerung der Δz der Feder abgelesen werden. Die Richtung der Schwerkraft ist von der Lage des Probekörpers abhängig, sie zeigt (näherungsweise! s. oben) zum Erdmittelpunkt. Folglich ist die Schwerkraft nicht Eigenschaft des Probekörpers allein, sondern eine gemeinsame Eigenschaft des Systems Probekörper/Erde. Um die Schwere eines Probekörpers als (richtungsunabhängige) Eigenschaft seiner selbst zu charakterisieren, wird der Begriff der schweren Masse m_S eingeführt:

$m_S \sim |\underline{F}_{\mathrm{Schwerkraft}}|$ bzw. $m_S \sim |\underline{G}|$.

Neue Idee: Könnte man nicht neben der Newton´schen BWG auch das Newton´sche Gravitationsgesetz als Messvorschrift zur Bestimmung der Masse eines Körpers verwenden?

Das Gewicht $\underline{G}$ eines (Probekörpers mit der schweren Masse m_S nahe der Erdoberfläche ist

$$\underline{G} = -\gamma \frac{m_S M}{r^3} \underline{r} = m_S \underline{g} \quad \text{also} \quad \underline{g} = -\frac{\gamma M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} \quad \text{für} \quad r << R \ .$$

Daraus ergibt sich mit der Erdmasse $M \approx 5{,}98\ 10^{24}$ kg und dem Erdradius $R \approx 6380$ km für den Betrag der Erdbeschleunigung $g \approx 9{,}81\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ (Korrekturen infolge geographischer Breite vernachlässigt).

Zunächst sind die Versuchsbedingungen zur Bestimmung der trägen Masse m_T auf der Basis der NBG und der schweren Masse m_S ausgehend vom Gravitationsgesetz sehr unterschiedlich. Um m_T und m_S miteinander vergleichen zu können, betrachten wir nun die <u>Beschleunigung a eines Körpers infolge seines eigenen Gewichts G</u>. Gemäß der NBG ist

$m_T\, a = m_S\, g$ (z-Achse in g-Richtung).

Bereits Galilei hatte bei seinen Fallversuchen am schiefen Turm von Pisa beobachtet, dass alle Körper im Gravitationsfeld der Erde gleich schnell fallen. Newton folgerte daraus, dass die Körper beim <u>freien</u> Fall die gleiche Beschleunigung erfahren, also

$a = \frac{m_S}{m_T} g = \text{const}$ → <u>für alle Körper ist das Verhältnis aus schwerer und träger Masse gleich!</u>

Werden m_T und m_S in kg gemessen folgt

$m_S = m_T =: m$ Äquivalenz von träger und schwerer Masse, Äquivalenzprinzip

Die Gleichheit von träger und schwerer Masse zählt zu den am besten experimentell gesicherten physikalischen Tatsachen:

(i) Pendelversuche von Newton bestätigten die Äquivalenz von träger und schwerer Masse mit einer Genauigkeit von 10^{-3},
(ii) Drehwaage, Cavendish 1798,
(iii) Genauigkeit des Eötvös-Experiments (1989 in Budapest) langes Torsionspendel): 10^{-11}.

■ Planetenbewegung

Newton leitete aus den Kepler´schen Gesetzen der Planetenbewegung das Gravitationsgesetz ab (vgl. MMP):

NBG: Bahnkurve <u>r</u>(t) ↔ wirkende Kraft <u>F</u>

Planetenbahnen gemäß 1.+ 2. Kepler´sches Gesetz) ↔ Gravitationskraft $\underline{F}_G$ zwingt die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne

• Gravitationsfeld

(Bitte Kapitel Felder, speziell Vektorfelder, im MMP-Skript SS14 wiederholen.)

Wir betrachten zwei MP mit den Massen m und M und legen den Ursprung des KS in M.

Gravitationskraft: $\underline{F}_G(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$

Das Kraftfeld $\underline{F}_G$ ist wirbelfrei, da

Skizze

$$\mathrm{rot}\, \underline{F}_G(\underline{r}) = 0 .$$

(zur Übung noch einmal überprüfen). Damit ist das Gravitationsfeld konservativ. Die in ihm an einer Masse m verrichtete Arbeit (sie erhöht die potenzielle Energie U(r) der Masse m im $\underline{F}_G(\underline{r})$) kann als Wegintegral entlang eines beliebigen Weges zwischen einem Bezugspunkt $\underline{r}_0$ zum Beobachtungspunkt $\underline{r}$ berechnet werden (MMP, Kapitel Kurvenintegrale)

$$U(r) - U(r_0) = -\int_C d\underline{r} \cdot \underline{F}_G(\underline{r}) \underbrace{=}_{\substack{\text{parametrisiere C durch} \\ \text{Radialstrahl } \underline{r}(\lambda)=\lambda \underline{e}_r}} + \gamma m M \int_{r_0}^{r} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \underline{e}_r \cdot \underline{e}_r = \frac{1}{r}\bigg|_{r_0}^{r} = -\gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Wird der Bezugspunkt r_0 ins Unendliche gelegt, folgt

$$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} .$$

Skizze

Die Größe U(r) ist die potenzielle Energie der Masse m im Gravitationsfeld $\underline{F}_G(\underline{r})$, das sogenannte Kepler-Potenzial. Wir vereinbaren die folgende Terminologie:

Gravitationskraft: $\underline{F}_G(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} = m\, \underline{g}(\underline{r})$

mit der Feldstärke

$$\underline{g}(\underline{r}) = -\frac{\gamma M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} .$$

Da unabhängig von der Masse des Probekörpers, ist die Feldstärke $\underline{g}(\underline{r})$ besser als die Gravitationskraft $\underline{F}_G(\underline{r})$ oder die potenzielle Energie U(r) zur Beschreibung des von der Masse M im Punkt $\underline{r}$ erzeugten Gravitationsfeldes geeignet. Für die zum Kraftfeld $\underline{F}_G(\underline{r})$ gehörende potenzielle Energie des Probeteilchens können wir

$$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} = m\,\phi(r)$$

schreiben, wobei wir das skalaren Potenzial $\phi(r)$

$$\phi(r) = -\frac{\gamma M}{r}, \quad \rightarrow \textbf{Gravitationspotenzial}$$

einführen. Man überzeugt sich leicht von $\mathrm{rot}\,\phi(r) = \underline{\nabla} \times \phi(r) = 0$ und findet, wie es sein muss,

$$\underline{g}(\underline{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\phi(r) = -\underline{\nabla}\,\phi(r) = -\frac{d\phi}{dr}\underline{e}_r = -\frac{\gamma mM}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}.$$

N an den Orten $\underline{r}_i$ befindliche Punktmassen m_i erzeugen am Ort $\underline{r}$ ein Gravitationsfeld, dessen Gravitationspotenzial sich nach dem Superpositionsprinzip in der Form

$$\phi(\underline{r}) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma m_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|}$$

darstellen lässt.

Analog Entsprechend erhalten wir im Fall einer kontinuierlichen Masseverteilung mit der Massendichte $\rho(\underline{r}')$ im Beobachtungspunkt $\underline{r}$ das Gravitationspotenzial

$$\phi(\underline{r}) = -\sum_{i=1}^{N} \gamma \frac{\overbrace{\rho(\underline{r}_i)\,\Delta V_i}^{m_i}}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} \xrightarrow[\Delta V_i \to 0]{\text{im Grenzfall}} \quad \phi(\underline{r}) = -\gamma \int d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}.$$

und für die Feldtstärke

$$\underline{g}(\underline{r}) = -\gamma \int d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^2} \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|}.$$