- "Sonderfall" **Energieerhaltung**

Wir zeigen nun, dass die Größe $\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$ erstens ein Integral der Bewegung ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, und dass, zweitens, diese Größe mit der mechanischen Energie es Systems identifiziert werden kann.

Der erste Teil er Behauptung folgt aus

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = \sum_{k=1}^{f} \left[\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)}_{\frac{\partial L}{\partial q_k}} \dot{q}_k + \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k} \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$\rightarrow$ wenn L nicht explizit zeitabhängig, dann ist $\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$ eine Erhaltungsgröße.

Zum Beweis des zweiten Teils der Behauptung nehmen wir der Einfachheit halber an, die Transformation von kartesischen auf verallgemeinerte Koordinaten $x_n = x_n(\underline{q})$ hänge nicht explizit von der Zeit und die potenzielle Energie nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\underline{\dot{q}}$ ab (also keine dissipativen Prozesse), d.h

$$\frac{\partial x_n}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0, \ k = 1,2,...,f.$$

Wegen $\frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \dot{q}_i$ und $T = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2$ lautet der Ausdruck für die kinetische Energie in verallgemeinerten Koordinaten

$$T(q,\underline{\dot{q}}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{i,j=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \ .$$

Die Indizes i und j laufen von 1 bis $f = 3N - R$, wobei f die Anzahl der Freiheitsgrade, N die Zahl der Teilchen und R die Zahl der Zwangsbedingungen bedeutet. In dieser Darstellung ist die Masse des ersten Teilchens $m_1 = m_2 = m_3$, des zweiten Teilchens $m_4 = m_5 = m_6$ usw.

Außerdem verwenden wir wie bisher die Notation $\underline{r} = (x_1, ..., x_{3N})$ und $\underline{q} = (q_1, ..., q_f)$ für die Komponenten der kartesischen bzw. verallgemeinerten Koordinaten.

Da $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \dfrac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ folgt

$$\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{k,j=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{i,k=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T$$

Insgesamt erhalten wir wie behauptet

$$\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = 2T - (T-U) = T + U$$

Fazit: Die mechanische Energie eines MPS bleibt erhalten, wenn seine Lagrange-Funktion nicht explizit von t und seine die potentielle Energie nicht explizit von $\dot{\underline{q}}$ abhängt

$$\underline{E := T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) + U(\underline{q}) = \mathrm{const}} \quad , \text{ wenn } \quad \underline{\frac{\partial L}{\partial t} = 0}.$$

Bemerkungen:

(i) $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$ ist eine hinreichende, jedoch keine notwendige Bedingung.

(ii) Vergleiche Satz von Euler für homogenen Funktionen: Ist f homogen vom Grade k, d.h. $f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = f(\lambda \underline{x}) = \lambda^k f(\underline{x})$ und stetig differenzierbar, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i} = k\, f(\underline{x})\,.$$

Die kinetische Energie ist eine homogene Funktion zweiten Grades der verallgemeinerten Geschwindigkeiten.

(iii) Die Herleitung der Tatsache, dass $\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$ die mechanische Energie des MPS ist, sollte nicht von der Wahl der Koordinaten abhängen. Deshalb hätten wir auch kartesische Koordinaten verwenden können. Dann ist

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 - \sum_{i=1}^{N} U(\underline{r}_i) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} U_{ik}(|\underline{r}_i - \underline{r}_k|) \quad \text{(äußeres Feld U, Wechselwirkung } U_{ik}\text{)}$$

und wir erhalten sofort

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} = m_i \dot{\underline{r}}_i \,, \text{ also } \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \dot{\underline{r}}_i - L = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 + \sum_{i=1}^{N} U(\underline{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} U_{ik}(|\underline{r}_i - \underline{r}_k|) = E$$

2.5 "Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen II. Art. Beispiele

1. Wähle geeignete, d.h., eventuell vorhandene Zwangbedingungen exakt befriedigende und die Symmetrie des Problems berücksichtigende, verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q} = (q_1, \dots, q_f)$ und drücke die kartesischen Koordinaten $\underline{r} = (x_1, \dots, x_{3N})$ durch $\underline{q}$ aus

$$x_n = x_n(\underline{q}) .$$

f ist die Anzahl der Freiheitsgrade des betrachteten Systems, R die Anzahl der Zwangbedingungen, z.B. f = 3N – R für eine MPS aus N Teilchen.

2. Stelle kinetische und potenzielle Energie als Funktionen von $\underline{q}$ und $\underline{\dot{q}}$ dar und bestimme die Lagrange-Funktion des mechanischen Systems

$$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) - U(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) .$$

Enthält $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ zyklische Koordinaten oder Terme der Form $\frac{d}{dt} F(\underline{q}, t)$ mit beliebigem F?

3. Leite die Bewegungsgleichung ($\rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichung)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots , f$$

ab.

4. Löse die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung existierender Integrale der Bewegung, bestimme die Integrationskonstanten und diskutiere die Lösung.

Bemerkung:

Wir können formal zwischen differentieller und integraler Form der Bewegungsgleichung unterscheiden.

	differentielle Form	**integrale Form**
gegeben:	$q_i(t=t_1)$, $\dot{q}_i(t_1)$, $\underline{F}(\underline{q},t)$, also $\ddot{q}_i(t_1)=\frac{1}{m}\,\underline{F}\left(\underline{q}(t_1,t_1)\right)$ bekannt	$q_i(t_1)$, $q_i(t_2)$, $L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)=T(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)-U(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$
berechne:	$\dot{q}_i(t_1+\Delta t)$ und $q_i(t_1+\Delta t)$	gesuchte Bahnkurve ist Lösung des Variationsproblems
	$\rightarrow$ BK über "differentielle Stückelung"	$S[\underline{q}(t)]=\text{Min}$ bzw. $\delta S[\underline{q}]=0$
		$\rightarrow$ Bahnkurve als "Ganzes"

Quantenmechanik: Pfadintegrale, (Dissertation Feynman): berücksichtige alle möglichen Trajektorien, allerdings mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten $\text{Prob}[q(t)]\sim\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,S[\underline{q}(t)]\right)$

Skizze

■ Bewegung eines geladenen Teilchens ($\rightarrow$ m, q) im elektromagnetischen Feld ($\rightarrow$ $\underline{E}$, $\underline{B}$)

1. Wir wählen $\underline{r}(t)$ und $\underline{\dot{r}}(t)$, da keine Zwangbedingungen/Bewegungsbeschränkungen oder Symmetrien vorgegeben sind.

2. Behauptung: Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(\underline{r},\underline{\dot{r}},t)=\frac{m}{2}\underline{\dot{r}}^2-q\,\phi(\underline{r},t)+q\,\underline{\dot{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r},t)$$

Keine zyklischen Variablen oder $\frac{dF(\underline{r},t)}{dt}$ Anteile.

Einschub: Maxwell´sche Gleichungen des elektromagnetischen Feldes

$$\operatorname{div}\underline{B}(\underline{r},t) = 0 \qquad \operatorname{div}\underline{D}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t) \qquad \underline{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\underline{E}$$

$$\operatorname{rot}\underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial\underline{B}(\underline{r},t)}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial\underline{D}(\underline{r},t)}{\partial t} \qquad \underline{B} = \mu_0\mu_r\underline{H}$$

Die beiden linken Gleichungen enthalten weder die Ladungsdichte (Quellen des elektrischen Feldes), noch die Stromdichte (Quelle des magnetischen Feldes). Die erste bringt zum Ausdruck, dass es keine magnetischen Ladungen gibt. Sie kann durch den Ansatz

$$\operatorname{rot}\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{B}(\underline{r},t)$$

erfüllt werden. Dieser definiert das <u>Vektorpotenzial</u> $\underline{A}(\underline{r},t)$ <u>des elektromagnetischen Feldes</u>. Aus der zweiten Gleichung, dem Faraday´schen Induktionsgesetz, folgt dann

$$0 = \operatorname{rot}\underline{E}(\underline{r},t) + \frac{\partial\underline{B}(\underline{r},t)}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\underline{E}(\underline{r},t) + \frac{\partial\underline{A}(\underline{r},t)}{\partial t}\right).$$

Da sich ein wirbelfreies Feld als Gradient eines skalaren Feldes darstellen lässt, wird diese Maxwell´sche Gleichung durch den Ansatz

$$\underline{E}(\underline{r},t) + \frac{\partial\underline{A}(\underline{r},t)}{\partial t} = -\operatorname{grad}\phi(\underline{r},t)$$

erfüllt. Er definiert das <u>skalare Potential des elektromagnetischen Feldes</u> $\phi(\underline{r},t)$.

3. Ableitung der Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$.

Wir gehen komponentenweise vor und beginnen mit der linken Seite:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x\,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + q\frac{dA_x}{dt} \qquad \text{(H1)}$$

Die rechte Seite ist etwas unübersichtlicher. Zunächst haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \overset{\Downarrow}{=}$$

Wenn wir die "nahrhafte Null" $\quad 0 = \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} - \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}$ addieren, folgt

$$\overset{\Downarrow}{=} -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} \right) - q\left(\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) - q\left(\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} - \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) =$$

$$= -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{\nabla})A_x + \left[\dot{\underline{r}} \times \underbrace{(\underline{\nabla} \times \underline{A})}_{\text{rot}\,\underline{A} = \underline{B}} \right]_x = -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q\left(\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + q\,(\dot{\underline{r}} \times \underline{B})_x = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \text{(H2)}$$

Für die letzte Umformung haben wir $(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{\nabla})\,A_x$ durch

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + (\dot{\underline{r}} \cdot \underline{\nabla})A_x \quad \text{d.h.} \quad -\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{dA_x}{dt} = (\dot{\underline{r}} \cdot \underline{\nabla})A_x$$

ersetzt und rot $\underline{A} = \underline{B}$ verwendet (bitte selbstständig nachprüfen). Setzen wir nun (H1) und (H2) gleich, folgt

$$m\ddot{x} + \underline{q\frac{dA_x}{dt}} = q\left(\underbrace{-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}}_{E_x \text{ wegen } E = -\text{grad}\phi - \frac{\partial A}{\partial t}} + \underline{\frac{dA_x}{dt}} + (\dot{\underline{r}} \times \underline{B})_x \right) = q(\underline{E} + \dot{\underline{r}} \times \underline{B})_x \ .$$

Analoge Vorgehensweise für die y- und die z-Komponente führt schließlich auf

$$\underline{m\,\ddot{\underline{r}} = q(\underline{E} + \dot{\underline{r}} \times \underline{B})} \quad \longrightarrow \quad \text{Lorentz-Kraft}$$

Wir erhalten die richtige Bewegungsgleichung, d.h. wir sind von der richtigen Lagrange-Funktion ausgegangen.

Beachte: Für den verallgemeinerten Impuls des Teilches finden wir $\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}} =: \underline{p} = m\dot{\underline{r}} + q\underline{A}$, der Term q $\underline{A}$ entspricht dem Impulsübertrag vom elektromagnetischen Feld auf das geladene Teilchen.

Für die Energie des Teilchens ergibt sich

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}}\cdot\dot{\underline{r}} - L = (m\dot{\underline{r}} + q\underline{A})\cdot\dot{\underline{r}} - \left[\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\phi(\underline{r},t) + q\dot{\underline{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r},t)\right] = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + q\phi(\underline{r},t) =: E\,.$$

Dabei ist $q\phi(\underline{r},t)$ die potenzielle Energie des Teilchens in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass das Magnetfeld keine Arbeit am Teilchen verrichtet.

- **Eichtransformation und Eichinvarianz**

Vektorpotential und skalares Potential des elektromagnetischen Feldes sind nicht eindeutig bestimmt: Die Transformation

$$\underline{A}(\underline{r},t) \to \underline{A}'(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r},t) + \operatorname{grad}\chi(\underline{r},t), \quad \phi(\underline{r},t) \to \phi'(\underline{r},t) = \phi(\underline{r},t) - \frac{\partial\chi(\underline{r},t)}{\partial t}$$

wobei $\chi(\underline{r},t)$ eine beliebige stetige, nach $\underline{r}$ und t differenzierbare Funktion sein kann, heißt Eichtransformation. Unter der Eichtransformation ändern sich die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ nicht, wie man leicht überprüfen kann. Diese Invarianz der Felder heißt Eichinvarianz.

Unter der Eichtransformation transformiert sich die Lagrange-Funktion

$L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\phi(\underline{r},t) + q\dot{\underline{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r},t)$ wie folgt:

$$L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) \to \tilde{L}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\left(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) + q\,\dot{\underline{r}}\cdot(\underline{A} + \operatorname{grad}\chi) = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\phi + q\,\dot{\underline{r}}\cdot\underline{A}}_{L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)} + \underbrace{q\left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \operatorname{grad}\chi\cdot\dot{\underline{r}}\right)}_{\frac{d\chi(\underline{r},t)}{dt}}$$

also ist $\tilde{L}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) + \frac{d\chi(\underline{r},t)}{dt}$.

Fazit: Die eich-transformierte Lagrange-Funktion enthält einen einzigen Zusatzterm, nämlich die vollständige Ableitung der Funktion $\chi(\underline{r},t)$ nach der Zeit. Wie wir wissen fällt ein solcher Term bei der Variation der Wirkung heraus und spielt deshalb keine Rolle bei der Ableitung der Bewegungsgleichung: $\underline{m\,\ddot{\underline{r}} = q(\underline{E}+\dot{\underline{r}}\times\underline{B})}$ ist eichinvariant.

Zwei Bemerkungen: Wer möchte, kann als Übung zeigen,

(i) dass die Potenziale $\underline{A}$ und ϕ von einander entkoppelten (!) inhomogenen Wellengleichungen

$$\underbrace{\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{\text{d´Alembert-Operator}}\underline{A}(\underline{r},t)=-\mu_0\,\underline{j}(\underline{r},t),\ \left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\underline{r},t)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r},t),\ c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0}\ \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit}$$

genügen; vorausgesetzt, wir nutzen die durch die Eichinvarianz gegebene Wahlfreiheit bei der Festlegung von $\underline{A}$ und ϕ, indem wir

$$\mathrm{div}\underline{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

fordern (Lorenz-Eichung, 1864).

(II) ■ Bewegung eines relativistischen Teilchens (→ Ruhemasse m_0, Ladung q) im elektromagnetischen Feld.

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)=-\sqrt{1-\frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}}\,m_0\,c^2-q\,\phi(\underline{r},t)+q\,\dot{\underline{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r},t)\ ,$$

m nichtrelativistischen Grenzfall $\frac{\dot{r}}{c}<<1$ folgt wegen

$$\left(1-\frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}m_0\,c^2\sim\left(1-\frac{1}{2}\frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}+\ldots\right)m_0\,c^2=m_0\,c^2-\frac{m_0}{2}\dot{\underline{r}}^2+\ldots$$

wieder das aus der nichtrelativistischen Betrachtung bekannte Ergebnis $L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)=\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2-q\,\phi(\underline{r},t)+q\,\dot{\underline{r}}\cdot A(\underline{r},t)$.

Bei der Ableitung der Bewegungsgleichung (z.B. wieder komponentenweise) ergibt sich das gleiche Resultat für

$\frac{\partial L}{\partial x}$, also $\frac{\partial L}{\partial x} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q\left(\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + q\,(\dot{\underline{r}} \times \underline{B})_x$.

Für $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ findet man im relativistischen Fall

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{c^2}\dot{x}\right) m_0\, c^2 + q\,A_x = \frac{m_0\,\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}}} + q\,A_x = m\,\dot{x} + q\,A_x$$

also $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\,\dot{x}) + q\frac{d\,A_x}{dt}$

Insgesamt folgt $\frac{d}{dt}(m\,\dot{\underline{r}}) = q\,(\underline{E} + \dot{\underline{r}} \times \underline{B})$ mit $m := \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}}}$ $\rightarrow$ relativistische Masse.

Die Energie des Teilchens ist $E = m\,c^2 + q\,\phi$, denn

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}}\cdot\dot{\underline{r}} - L = \underbrace{(m\,\dot{\underline{r}} + \underset{******}{q\,\underline{A}})}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}}}\cdot\dot{\underline{r}} + m_0\sqrt{1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}}\;c^2 + q\,\phi - q\,\dot{\underline{r}}\cdot\underset{******}{q\,\underline{A}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}}}\left[\dot{\underline{r}}^2 + \left(1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}\right)c^2\right] + q\,\phi =$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}}}\,c^2 + q\,\phi = m\,c^2 + q\,\phi := E$$

Kompakte Schreibweise unter Verwendung des "relativistischen Faktors" $\gamma := \left(1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = -\frac{1}{\gamma}m_0\,c^2 - q\,\phi(\underline{r}, t) + q\,\dot{\underline{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r}, t)\,,\quad E = \gamma m_0\,c^2 + q\,\phi(\underline{r}, t)\,,\quad \gamma := \left(1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

2.6 Bewegungsbeschränkungen (BB), Zwangsbedingungen (ZB) und Zwangskräfte (ZK). Lagrange-Gleichungen I. Art

■ Kleine Kugel rollt reibungsfrei im Innern eines Trichters (vgl. Übung)

■ Pendel mit rotierendem Aufhängepunkt

$$x = R\cos\Omega t + l\sin\varphi$$
$$y = R\sin\Omega t - l\cos\varphi$$
$$z = 0$$

Zwangbedingung

Skizze

$$g(x, y, t) = (x - R\cos\Omega t)^2 + (y - R\sin\Omega t)^2 - l^2 = 0$$

■ Massepunkt gleitet reibungsfrei auf einer rotierenden Stange

$$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\varphi, \quad \varphi = \omega t$$

Skizze

Zwangbedingung: $g(x, y, t) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} - \omega t = 0$

■ Kleine Kugel rollt im Schwerefeld reibungsfrei vom oberen Pol einer größeren Kugel mit dem Radius R

Zwangbedingung: $x^2 + y^2 - R^2 \geq 0$

Skizze

■ Münze rollt reibungsfrei[1)] und stets senkrecht stehend[2)] in der x-y-Ebene

[1)] Bogengeschwindigkeit des Scheibenrandes $R\dot{\varphi}$ (φ - Rotationswinkel) ist stets gleich dem Betrag der Geschwindigkeit des Berührungspunktes $v = R\dot{\varphi}$. [2)] Der Scheibenmittelpunkt liegt stets über dem Berührungspunkt.

Dann gilt
$$v_x = \dot{x} = v\sin\theta$$
$$v_y = \dot{y} = -v\cos\theta$$

Zwangbedingung :
$$dx - R\sin\theta\, d\varphi = 0$$
$$dy + R\cos\theta\, d\varphi = 0$$

Skizze

Klassifikation der Zwangbedingungen

ZB der Form $g_\alpha(\underline{r}, t) = 0,\ \alpha = 1, \ldots, R$ heißen **holonome** (integrabel). Sind die Funktionen $g_\alpha(\underline{r}, t)$ explizit zeitabhängig/zeitunabhängig werden sie **rheonom** (2. und 3. Beispiel oben)/ **skleronom** (1. Beispiel oben) genannt.

Nichtholonome ZB enthalten Geschwindigkeiten oder sind zwischen Differentialen (5. Beispiel oben) oder unter Verwendung von Ungleichungen (4. Beispiel oben) formuliert.

Um die Problematik der Bestimmung der Bahnkurve bei Bewegung unter Zwangbedingungen zu verdeutlichen, betrachten wir zunächst der Einfachheit halber die Bewegung <u>eines</u> MP unter Einwirkung der (eingeprägten) Kraft $\underline{F}$, wenn <u>eine holonome ZB</u> vorliegt. Auch wenn diese ZB formuliert werden kann, ist die entsprechende ZK $\underline{Z}$ oft nicht explizit gegeben, da sie i.a. von der tatsächlichen, also noch unbekannten Bahnkurve abhängig ist. Die rechte Seite der Newton´schen BWG

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \underline{Z}$$

ist somit nicht vollständig bekannt und das beschriebene "Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen im Rahmen der Newton´schen Mechanik nicht unmittelbar anwendbar.

Um dieses Problem zu lösen, gibt es folgende Möglichkeiten:

A: Wir eliminieren $\underline{Z}$ durch Einführung verallgemeinerter Koordinaten, $\underline{r} = \underline{r}(\underline{q},t)$, welche die ZB identisch erfüllen und bestimmen die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ über $\underline{q}(t)$. Das ist die Vorgehensweise im Lagrange-II-Formalismus. Dieser ist elegant, aber die ZK können nicht explizit berechnet werden.

B: Wir nutzen aus, dass holonome ZB die Bewegung des MP auf die Fläche $g(\underline{r}, t) = 0$ im R^3 einschränken, ohne die Bewegung innerhalb dieser Fläche zu beeinflussen. Demzufolge steht $\underline{Z} \perp$ auf der Fläche $g(\underline{r}, t) = 0$, besitzt also <u>keine</u> Komponenten "in Richtung" dieser Fläche. Das bedeutet

$g(\underline{r},t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Z} \parallel \operatorname{grad} g(\underline{r},t)$ also $g(\underline{r},t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Z}=\lambda(t)\ \operatorname{grad} g(\underline{r},t)$.

Die Newton´sche BWG für die Bewegung eines MP bei einer holonomen ZB lautet somit

$$m\,\ddot{\underline{r}}=\underline{F}+\underline{Z}=\underline{F}+\lambda(t)\ \operatorname{grad} g(\underline{r},t) \ .$$

Der zeitabhängige Parameter λ bleibt zunächst unbestimmt.

Verallgemeinert auf ein MPS aus N MP und R holonome ZB haben wir 3N + R Gleichungen der Form

$$m_n\,\ddot{r}_n=F_n(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)+\sum_{\alpha=1}^{R}\lambda_\alpha(t)\,\frac{\partial g_\alpha(\underline{r},t)}{\partial r_n}\ ,\ \ g_\alpha(\underline{r},t)=0\,, \qquad \text{(H1)}$$
$$\underline{r}=(r_1,\ldots,r_{3N}) \quad \alpha=1,\ldots,R\ ,\ \ n=1,\ldots,3N$$

für 3N unbekannte Funktionen $r_n(t)$ und R unbekannte Parameter $\lambda_\alpha(t)$.

Um die $\lambda_\alpha(t)$ zu eliminieren, berechnen wir $\frac{d^2 g_\alpha}{dt^2}$:

$$0=\frac{d^2 g_\alpha}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\dot{r}_n+\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}\right) \ \text{ bzw. } \ \sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\ddot{r}_n=G_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)\,.$$

Die zweiten Ableitungen $\ddot{r}_n$ treten lediglich linear auf, da die holonomen ZB $g_\alpha(\underline{r},t)=0,\ \alpha=1,\ldots,R$ unabhängig von $\dot{\underline{r}}$ sind. Die Funktionen G_α auf der rechten Seite subsummieren alle restlichen, also nicht $\ddot{r}_n$ enthaltenden Terme.
Setzen wir $\ddot{r}_n$ aus der BWG ein, ergibt sich ein lineares inhomogenes Gleichungssystem für die noch unbekannten Größen $\lambda_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)$

$$G_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)=\sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\ddot{r}_n=\sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\frac{1}{m_n}\left[F_n(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)+\sum_{\beta=1}^{R}\lambda_\beta(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)\,\frac{\partial g_\beta(\underline{r},t)}{\partial r_n}\right].$$

Mit den gefundenen $\lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ ist die rechte Seite der Newton´schen BWG (H1) bekannt und die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ kann aus

$$m_n \ddot{r}_n = F_n(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \frac{\partial g_\alpha(\underline{r}, t)}{\partial r_n} \tag{H2}$$

bestimmt werden.

Für die Komponenten der Zwangskraft erhalten wir

$$Z_n = \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \frac{\partial g_\alpha(\underline{r}, t)}{\partial r_n} \quad \text{(H3)},$$

wobei $\underline{r}(t)$ die aus (H2) ermittelte Lösung ist.

- **Zusammenhang mit Lagrange II**

Wählen wir $f = 3N - R$ verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q}$ derart, dass $g_\alpha(\underline{r}(\underline{q}, t), t) \equiv 0$, dann ist

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial q_k} = 0 \qquad \text{also} \qquad \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n} \frac{\partial r_n}{\partial q_k} = 0, \; k = 1, \ldots, f \; .$$

Mit dieser Beziehung lassen sich die Zwangskräfte aus der Bewegungsgleichung (H1) eliminieren, indem man sie komponentenweise mit $\frac{\partial r_n}{\partial q_k}$ multipliziert und über n summiert

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{r}_n \frac{\partial r_n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial r_n}{\partial q_k}}_{\substack{\text{das führt auf Lagrange-Gleichungen II Art} \\ \text{(vgl. etwa (H2) Kap. 1.3 mit } \frac{\partial r_n}{\partial q_k} = (\underline{e}_k)_n\text{)}}} + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \underbrace{\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n} \frac{\partial r_n}{\partial q_k}}_{\text{Null}} \; .$$

- **Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen mit Lagrange I (im Fall holonomer Zwangbedingungen)**

(i) Wähle die Koordinaten und formuliere die ZB

(ii) Bestimme die Lagrange-Funktion und stelle die Lagrange-Gleichungen I. Art unter Berücksichtigung des Ansatzes $Z_n = \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha(\underline{r}, t)}{\partial r_n}$ auf.

(iii) Bestimme die Abhängigkeit von $\lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$, indem die ZB zweifach nach t abgeleitet werden und die $\ddot{\underline{r}}$ mit Hilfe der Bewegungsgleichungen eliminiert werden.

(iv) $\lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ in die Lagrange-Gleichungen I. Art einsetzen und aus den Anfangsbedingungen die Integrationskonstanten ermitteln.

(v) Die Komponenten der Zwangskraft aus $Z_n = \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \frac{\partial g_\alpha(\underline{r}, t)}{\partial r_n}$ berechnen und die Lösung diskutieren.