2.6 Bewegungsbeschränkungen (BB), Zwangsbedingungen (ZB) und Zwangskräfte (ZK). Lagrange-Gleichungen I. Art

■ Kleine Kugel rollt reibungsfrei im Innern eines Trichters (vgl. Übung)

■ Pendel mit rotierendem Aufhängepunkt

$$x = R\cos\Omega t + l\sin\varphi$$
$$y = R\sin\Omega t - l\cos\varphi$$
$$z = 0$$

Zwangbedingung

$$g(x,y,t) = (x - R\cos\Omega t)^2 + (y - R\sin\Omega t)^2 - l^2 = 0$$

Skizze

■ Massepunkt gleitet reibungsfrei auf einer rotierenden Stange

$$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\varphi, \quad \varphi = \omega t$$

Skizze

Zwangbedingung: $g(x,y,t) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} - \omega t = 0$

■ Kleine Kugel rollt im Schwerefeld reibungsfrei vom oberen Pol einer größeren Kugel mit dem Radius R

Zwangbedingung: $x^2 + y^2 - R^2 \geq 0$

Skizze

Klassifikation der Zwangbedingungen

ZB der Form $g_\alpha(\underline{r},t)=0,\ \alpha=1,\dots,R$ heißen **holonom**e (integrabel). Sind die Funktionen $g_\alpha(\underline{r},t)$ explizit zeitabhängig/zeitunabhängig werden sie **rheonom** (2. und 3. Beispiel oben)/ **skleronom** (1. Beispiel oben) genannt.

Nichtholonome ZB enthalten Geschwindigkeiten oder sind zwischen Differentialen (5. Beispiel oben) oder unter Verwendung von Ungleichungen formuliert.

Bei Bewegungsbeschränkungen ist die Bestimmung der Bahnkurven aus der Newton´schen Bewegungsgleichung u.U. unübersichtlich. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir der Einfachheit halber zunächst die Bewegung eines MP unter Einwirkung der eingeprägten Kraft $\underline{F}$, wenn eine einzige holonome ZB vorliegt. Auch wenn diese ZB formuliert werden kann, ist die entsprechende ZK $\underline{Z}$ nicht immer gegeben, da sie i.a. von der tatsächlichen, also noch unbekannten Bahnkurve abhängig ist. Die rechte Seite der Newton´schen BWG

$$m\ddot{\underline{r}}=\underline{F}+\underline{Z}$$

ist somit nicht vollständig bekannt und das erarbeitete "Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen im Rahmen der Newton´schen Mechanik daher nicht unmittelbar anwendbar.

In dieser Situation gibt es folgende Möglichkeiten:

A: Wir eliminieren $\underline{Z}$ durch Einführung verallgemeinerter Koordinaten $\underline{r}=\underline{r}(\underline{q},t)$, die die ZB identisch erfüllen, und bestimmen die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ über $\underline{q}(t)$. Das ist die Vorgehensweise im Lagrange-II-Formalismus. Dieser ist elegant, allerdings können die ZK nicht explizit berechnet werden.

B: Wir nutzen aus, dass holonome ZB die Bewegung auf die Fläche $g(\underline{r},t)=0$ im R^3 einschränken, ohne die Bewegung innerhalb dieser Fläche zu beeinflussen. Demzufolge steht $\underline{Z}\perp$ auf der Fläche $g(\underline{r},t)=0$, besitzt also keine Komponenten "in Richtung" dieser Fläche.

Das bedeutet

$$g(\underline{r},t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Z} \parallel \operatorname{grad} g(\underline{r},t) \quad \text{also} \quad g(\underline{r},t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Z}=\lambda(t)\ \operatorname{grad} g(\underline{r},t)\ .$$

Die Newton´sche BWG für die Bewegung eines MP bei einer holonomen ZB lautet somit

$$m\,\ddot{\underline{r}}=\underline{F}+\underline{Z}=\underline{F}+\lambda(t)\ \operatorname{grad} g(\underline{r},t)\ .$$

Der zeitabhängige Parameter λ bleibt zunächst unbestimmt.

Verallgemeinert auf ein MPS aus N MP bei R holonomen ZB haben wir 3N + R Gleichungen der Form

$$m_n\,\ddot{r}_n=F_n(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)+\sum_{\alpha=1}^{R}\lambda_\alpha(t)\,\frac{\partial g_\alpha(\underline{r},t)}{\partial r_n}\ ,\ g_\alpha(\underline{r},t)=0,$$

$$\underline{r}=(r_1,\ldots,r_{3N})\quad \alpha=1,\ldots,R\ ,\quad n=1,\ldots,3N \qquad \text{(H1)}$$

für 3N unbekannte Funktionen $r_n(t)$ und R unbekannte Parameter $\lambda_\alpha(t)$.

Um die $\lambda_\alpha(t)$ zu eliminieren, berechnen wir $\dfrac{d^2 g_\alpha}{dt^2}$:

$$0=\frac{d^2g_\alpha}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\dot{r}_n+\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}\right)\quad \text{bzw.}\quad \sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\ddot{r}_n=G_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)\,.$$

Die zweiten Ableitungen $\ddot{r}_n$ treten lediglich linear auf, da die holonomen ZB $g_\alpha(\underline{r},t)=0,\ \alpha=1,\ldots,R$ unabhängig von $\dot{\underline{r}}$ sind. Die Funktionen G_α auf der rechten Seite subsummieren alle restlichen, also nicht $\ddot{r}_n$ enthaltenden Terme.

Setzen wir oben $\ddot{r}_n$ aus der BWG ein, ergibt sich ein lineares inhomogenes algebraisches Gleichungssystem für die noch unbekannten Größen $\lambda_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)$

$$G_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\,\ddot{r}_n = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\,\frac{1}{m_n}\left[\,F_n(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) + \sum_{\beta=1}^{R} \lambda_\beta(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)\,\frac{\partial g_\beta(\underline{r},t)}{\partial r_n}\,\right].$$

Mit den gefundenen $\lambda_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)$ ist die rechte Seite der Newton´schen BWG (H1) bekannt und die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ kann aus

$$m_n\,\ddot{r}_n = F_n(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)\,\frac{\partial g_\alpha(\underline{r},t)}{\partial r_n} \qquad \text{(H2)}$$

berechnet werden.

Für die Komponenten der Zwangskraft erhalten wir

$$Z_n = \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)\,\frac{\partial g_\alpha(\underline{r},t)}{\partial r_n} \quad \text{(H3)},$$

wobei $\underline{r}(t)$ die aus (H2) ermittelte Lösung ist.

- **Zusammenhang mit Lagrange II**

Wählen wir $f = 3N - R$ verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q}$ so, dass $g_\alpha(\underline{r}(\underline{q},t),t) \equiv 0$, dann ist

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial q_k} = 0 \qquad \text{also} \qquad \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\,\frac{\partial r_n}{\partial q_k} = 0,\ k = 1,\ldots,f\ .$$

Mit dieser Beziehung lassen sich die Zwangskräfte aus der Bewegungsgleichung (H1) eliminieren, indem man sie komponentenweise mit $\frac{\partial r_n}{\partial q_k}$ multipliziert und über n summiert

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{3N} m_n\,\ddot{r}_n\,\frac{\partial r_n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n\,\frac{\partial r_n}{\partial q_k}}_{\substack{\text{das führt auf Lagrange–Gleichungen II Art} \\ \text{(vgl. etwa (H2) Kap. 1.3 mit } \frac{\partial r_n}{\partial q_k} = (\underline{e}_k)_n\text{)}}} + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t)\underbrace{\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\,\frac{\partial r_n}{\partial q_k}}_{\text{Null}}\ .$$

- **Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen mit Lagrange I (im Fall holonomer Zwangbedingungen)**

(i) Wähle die Koordinaten und formuliere die ZB

(ii) Bestimme die Lagrange-Funktion und stelle die Lagrange-Gleichungen I. Art unter Berücksichtigung des Ansatzes $Z_n = \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha(\underline{r}, t)}{\partial r_n}$ auf.

(iii) Bestimme die Abhängigkeit von $\lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$, indem die ZB zweifach nach t abgeleitet werden und die $\ddot{\underline{r}}$ mit Hilfe der Bewegungsgleichungen eliminiert werden.

(iv) $\lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ in die Lagrange-Gleichungen I. Art einsetzen und aus den Anfangsbedingungen die Integrationskonstanten ermitteln.

(v) Berechne die Komponenten der Zwangskraft aus $Z_n = \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \frac{\partial g_\alpha(\underline{r}, t)}{\partial r_n}$ und diskutiere die Lösung.

■ Einfaches Beispiel: Gleitende Kugel auf gleitendem Keil (reibungsfrei)

A: Lagrange I

Skizze:

Koordinaten: Kugel x(t), y(t)   Keil X(t)

Anfangsbedingungen zu $t = t_0 = 0$: $x(0) = X(0) = 0,\ y(0) = h\ ,\ \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{X}(0) = 0$

Zwangbedingung: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{h-y}{x-X}$ also $g(x,y,X) = y + (x-X)\,\mathrm{tg}\,\alpha - h = 0$

Lagrange-Funktion: $L = \dfrac{M}{2}\dot{X}^2 + \dfrac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mg\,y$

$$\tilde{L} = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mg\,y + \lambda\left[y + (x-X)\,\mathrm{tg}\,\alpha - h\right]$$

Lagrange-Gleichungen I. Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} = \lambda(t)\,\frac{\partial g}{\partial r_i} \qquad \text{oder} \qquad m\,\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \lambda(t)\ \mathrm{grad}\,g(\underline{r},t)$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 = x:&\quad m\ddot{x} = \lambda(t)\ \mathrm{tg}\,\alpha \\ r_2 = y:&\quad m\ddot{y} = \lambda(t) - mg \\ r_3 = X:&\quad M\ddot{X} = -\lambda(t)\ \mathrm{tg}\,\alpha \end{aligned}\right\}\ (H)$$

ZB zweifach nach t abgeleitet: $\frac{d^2g}{dt^2}=0 \;\rightarrow\; \ddot{y}+(\ddot{x}-\ddot{X})\,\mathrm{tg}\,\alpha=0$ und $\ddot{x},\ddot{y}$ sowie $\ddot{X}$

mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen eliminiert führt auf

$$\lambda(t)-mg+\left(\lambda(t)\ \mathrm{tg}\,\alpha+\frac{m}{M}\lambda(t)\ \mathrm{tg}\,\alpha\right)\mathrm{tg}\,\alpha=0\text{, also}\qquad \lambda(t)=\frac{mg}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)\mathrm{tg}^2\alpha}=\text{const}\,.$$

In unserem einfachen Beispiel ist λ zeitunabhängig. Also sind die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen (H) konstant, d.h., sie beschreiben wie erwartet eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ergibt sich sofort

$$x(t)=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)\mathrm{tg}^2\alpha}\frac{g}{2}t^2,\ y(t)=h-\left(1-\frac{1}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)\mathrm{tg}^2\alpha}\right)\frac{g}{2}t^2,\ X(t)=-\frac{m}{M}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)\mathrm{tg}^2\alpha}\frac{g}{2}t^2.$$

Diskussion:

(i) x(t): Für $M \gg m$ ist die Beschleunigung $\frac{g\,\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=g\,\mathrm{tg}\alpha\,\cos^2\alpha=g\sin\alpha\,\cos\alpha$. Das ist wie zu erwarten die x-Komponente der "Hangabtriebbeschleunigung" $g\sin\alpha$.

(ii) Wie weit ist der Keil gerutscht, wenn die Kugel bei y = 0 angelangt ist? Aus y = 0 folgt

$$h=\left(1+\frac{m}{M}\right)\mathrm{tg}\alpha\frac{g}{2}t^2\ \rightarrow\frac{g}{2}t^2=\frac{h}{\left(1+\frac{m}{M}\right)\mathrm{tg}\alpha}\ \rightarrow\ X(y=0)=-\frac{m}{M}\frac{h}{\left(1+\frac{m}{M}\right)\mathrm{tg}\alpha}=-\frac{h\,\mathrm{ctg}\alpha}{1+\frac{M}{m}}=:X_{max}$$

.

Wie zu erwarten ist $X_{max}\rightarrow 0$ für $M\rightarrow\infty$ und $X_{max}\rightarrow-\infty$ für $\alpha\rightarrow 0$.

■ Gleitende Kugel auf gleitendem Keil (reibungsfrei) **B: Lagrange II**

Bei der Lösung des gleichen Problems über Lagrange II wählen wir wieder die Koordinate X(t) für die Position des Keils aber um die ZB identisch erfüllen zu können als verallgemeinerte Koordinate den zurückgelegten Weg s(t) anstelle von x(t) und y(t) (f = 3 – 1 = 2). Dann ist

$$x = X + s\,\cos\alpha,\; y = h - s\,\sin\alpha \;,\quad g(x,y,X) = \mathrm{tg}\alpha - \frac{h-y}{x-X} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{s\,\sin\alpha}{s\,\cos\alpha} \equiv 0 \;.$$

<u>Lagrange-Funktion:</u>

$$L = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left[(\dot{X} + \dot{s}\,\cos\alpha)^2 + \dot{s}\,\sin^2\alpha\right] - mg(h - s\,\sin\alpha) =$$
$$= \frac{M+m}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\dot{s}^2 + m\dot{X}\dot{s}\cos\alpha + mgs\sin\alpha - mgh$$

Die Koordinate X ist zyklisch, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = (M+m)\dot{X} + m\underbrace{\cos\alpha\,\dot{s}}_{\dot{x}-\dot{X}} = \mathrm{const} \overset{AB}{=} 0 \;\text{ bzw. }\; M\dot{X} + m\dot{x} = 0 \;\rightarrow\; \text{Impulserhaltung.}$$

<u>Lagrange-Gleichungen:</u>

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{s} + m\cos\alpha\,\dot{X}\right) \\ \frac{\partial L}{\partial s} &= mg\sin\alpha \end{aligned}\right\} m\cos\alpha\,\ddot{X} + m\ddot{s} - mg\sin\alpha = 0,$$

sowie die schon abgeleitete Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right) = (M+m)\,\ddot{X} + m\cos\alpha\,\ddot{s} = 0;\;\text{ aus dieser folgt }\; m\ddot{s} = -\frac{M+m}{\cos\alpha}\ddot{X}\,.$$

Eingesetzt in die Gleichung für $\ddot{X}$ finden wir $m\cos\alpha\,\ddot{X}-\frac{M+m}{\cos\alpha}\ddot{X}-mg\sin\alpha=0$, also wie bei Lagrange I

$$\ddot{X}=-\frac{m}{M}\frac{tg\alpha}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)tg^2\alpha}g=\text{const}$$

usw.

■ Lösung der Aufgabe auf der Basis von Energie- und Impulserhaltung

Impulserhaltung $M\dot{X}+m\dot{x}=\text{const}\overset{AB}{=}0$ führt unter Verwendung der AB X(0) = x(0) = 0 auf $\underline{X=-\frac{m}{M}x}$. Aus der ZB $y=h-(x-X)\,tg\alpha$ wird $\underline{y=h-x\left(1+\frac{m}{M}\right)tg\alpha}$ und $\underline{\dot{y}=-\left(1+\frac{m}{M}\right)tg\alpha\;\dot{x}}$. Damit lassen sich X, y und $\dot{y}$ im Energieerhaltungssatz

$$L=\frac{M}{2}\dot{X}^2+\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+mg\,y=\text{const}\overset{AB}{=}mg\,h$$

eliminieren. Nach einfachen Umfomungen folgt

$$\dot{x}^2=2a\,x\quad\text{mit}\quad a:=2g\,\frac{tg\alpha}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)tg^2\alpha}\;.$$

Einfache Integration unter Berücksichtigung der AB ($\dot{x}=\sqrt{2a}\sqrt{x}$, $\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{2a}\,dt$, $2\sqrt{x}=\sqrt{2a}\,t+0$) ergibt wieder wie oben

$$x(t)=\frac{a}{2}t^2\;,\qquad X(t)=-\frac{m}{M}\frac{a}{2}t^2\qquad\text{und}\qquad y(t)=h-\left(1+\frac{m}{M}\right)tg\alpha\,\frac{a}{2}t^2\;.$$

2.7 Lagrange-Gleichungen I. Art als Variationsproblem mit Nebenbedingungen

Wir leiten die Bewegungsgleichungen nun aus dem Hamilton´schen Variationsprinzip $\delta S[\underline{r}(t)] = 0$ unter Berücksichtigung von R Nebenbedingungen der Form $g_\alpha(\underline{r},t) = 0,\ \alpha = 1,...,R$ ab, also ohne Verwendung der Newton´schen Bewegungsgleichung. Dabei gehen wir wie in Kap. 2.3 vor, verwenden jedoch zunächst keine verallgemeinerten Koordinaten. Für die Variation der Wirkung infolge einer Variation $\delta\underline{r}(t)$ entlang einer Trajektorie $\underline{r}(t)$ mit $\delta\underline{r}(t_1) = \delta\underline{r}(t_2) = 0$ ergibt sich

$$0 \overset{!}{=} \delta S[\underline{r}(t)] = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial L}{\partial r_i}\delta r_i + \sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\delta\dot{r}_i + ... =$$

$$\sum_{i=1}^{3N}\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial r_i}\delta r_i + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\delta r_i\right)}_{\substack{\text{Integration über } t \to \text{Null},\\ \text{da } \delta r_i(t_1)=\delta r_i(t_2)=0}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right)\delta r_i\right] = \sum_{i=1}^{3N}\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right)\right]\delta r_i .$$

In Kap. 2.3 waren die Komponenten δr_i der Variation $\delta\underline{r}$ der Bahnkurve beliebige, <u>voneinander unabhängige</u> (kleine) Größen und aus der Forderung $\delta S[\underline{r}(t)] = 0$ folgten die Lagrange-Gleichungen II. Art, da die Ausdrücke in den eckigen Klammern im letzten Ausdruck verschwinden müssen. Jetzt sind die δr_i nicht voneinander unabhängig, sondern über die Nebenbedingungen mit einander gekoppelt, denn auch die variierten Bahnkurven müssen die NB erfüllen

$$g_\alpha(\underline{r}+\delta\underline{r},t) = g_\alpha(\underline{r},t) + \sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_i}\delta r_i + O\left((\delta r_i)^2\right),\ \text{also}\quad \sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_i}\delta r_i = 0,\ \alpha = 1,...,R$$

für kleine δr_i .

Ein effektives und elegantes Verfahren zur Lösung von Extremalproblemen mit Nebenbedingungen ist die Methode der unbestimmten Multiplikatoren von Lagrange. Lagrange betrachtet anstelle von $S[\underline{r}(t)]$ das Funktional

$$\tilde{S}[\underline{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \tilde{L}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) \quad , \quad \tilde{L}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t)\, g_\alpha(\underline{r},t)$$

mit den zunächst unbekannten → **Lagrange-Multiplikatoren** $\lambda_\alpha(t)$. Es folgt

$$\delta\tilde{S}[\underline{r}(t)] = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = \ldots = \sum_{i=1}^{3N}\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t)\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_i} \right] \delta r_i = 0 \,.$$

Da die Nebenbedingungen noch nicht verwendet worden, sind alle δr_i jetzt unabhängig voneinander. Es muss also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t)\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_i}}_{Z_i} \ , \ i = 1,\ldots,3N \qquad \text{Lagrange-Gleichungen I. Art}$$

gelten. Die Lösungen $r_i\left(t;\underline{\lambda}(t)\right)$ dieser Lagrange-Gleichungen I. Art hängen von den Lagrange-Multiplikatoren ab, die mit Hilfe der R Nebenbedingungen $g_\alpha\left[r_i\left(t;\underline{\lambda}(t)\right),t\right] = 0$ fixiert werden. Auf der rechten Seite der Gleichung stehen die Komponenten der Zwangskraft Z_i .

FAZIT: Das Hamilton´sche Variationsprinzip führt angewendet auf Systeme mit Zwangbedingungen (Bewegungsbeschränkungen) auf Lagrange-Gleichungen I. Art. Die physikalischen Zwangbedingungen werden zu Nebenbedingungen des Variationsproblems.

■ Kleine Kugel im Trichter (reibungsfrei, Rotationsenergie der Kugel vernachlässigen)

Die Bahnkurve eines MP, der sich reibungsfrei im Schwerefeld der Erde ($\underline{g}$) reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels bewegt, haben wir bereits in Kap. 2.5 im Rahmen von Lagrange II diskutiert. Hier soll die Lösung gemäß Lagrange I, also einschließlich der Berechnung der Zwangskräfte skizzierte werden.

Aus Symmetriegründen wählen wir Zylinderkoordinaten mit der z-Achse als Rotationsachse des Kegels $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z$. Die holonome Zwangbedingung $g(r,z) = r - \mathrm{tg}\alpha\ z = 0$ wird durch diese Koordinatenwahl nicht identisch erfüllt, also nicht eliminiert!

Die Lagrange-Funktion lautet in Zylinderkoordinaten

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz = L(r,\dot{r},\dot{\varphi},z,\dot{z})\,.$$

Daraus finden wir leicht die Lagrange-Gleichungen I. Art

$$m\ddot{z} = -mg + Z_z = -mg + \lambda\frac{\partial g}{\partial z} = -mg - \lambda\,\mathrm{tg}\alpha\,,$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = Z_r = \lambda\frac{\partial g}{\partial r} = \lambda\ ,$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\ \dot{\varphi}) = Z_\varphi = \lambda\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0\,.$$

Die Zwangbedingung, zweifach nach der Zeit abgeleitet, liefert $\ddot{r} - \mathrm{tg}\alpha\ \ddot{z} = 0$, woraus sich unter Verwendung der Ausdrücke für $\ddot{r}$ und $\ddot{z}$ folgende Beziehung für den unbekannten Parameter λ ergibt $0 = m\ddot{r} - \mathrm{tg}\alpha\ m\ddot{z} = mr\dot{\varphi}^2 + \lambda - \mathrm{tg}\alpha(-mg - \lambda\,\mathrm{tg}\alpha)$ oder

$$\lambda = -\frac{mr\dot{\varphi}^2 + mg\,\mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} = \lambda(r(t),\dot{\varphi}(t))\ .$$

Eingesetzt in die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen folgt

$$\ddot{z}+g\sin^2\alpha - r\dot{\varphi}^2\sin\alpha\cos\alpha = 0\,,$$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0 \qquad \text{und}$$

$$r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\,\dot{\varphi}=0 \;\rightarrow\; \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})=0 \;\rightarrow\; m r^2\dot{\varphi} = \text{const} = L_z\;.$$

Das bedeutet Drehimpulserhaltung wie im Kap. 2.5: φ taucht nicht in L auf, ist also zyklische Koordinate.

NR:

$$\ddot{z} = -g + \frac{r\dot{\varphi}^2 + g\,\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\mathrm{tg}\alpha = \frac{-g(1+\mathrm{tg}^2\alpha)+g}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{r\dot{\varphi}^2\,\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{-g\,\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{r\dot{\varphi}^2\,\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = -g\sin^2\alpha + r\dot{\varphi}^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{r\dot{\varphi}^2 + g\,\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \ddot{r} + \frac{r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\varphi}^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} + g\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

Die anderen beiden Gleichungen stimmen unter Berücksichtigung der Notation $r_{(\text{Kap. }2.7)} = \sin\alpha\; r_{(\text{Kap. }2.5)}$ mit denen in Kap. 2.5 im Rahmen des Lagrange-II-Formalismus abgeleiteten Bewegungsgleichungen überein. Die weitere Vorgehensweise ist in Kap. 2.5 bereits beschrieben. Zusätzlich erhalten wir die Komponenten der Zwangskraft

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} Z_r \\ Z_\varphi \\ Z_z \end{pmatrix} = \lambda(\dot{\varphi})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\mathrm{tg}\alpha \end{pmatrix} = \frac{m r\dot{\varphi}^2 + m g\,\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \mathrm{tg}\alpha \end{pmatrix}.$$

Bem.: Aus diesem Beispiel lernen wir, dass in Lagrange I krummlinige Koordinaten verwendet werden können, um die Symmetrie des Problems ausnutzen zu können. Diese sind dann keine verallgemeinerten Koordinaten in dem Sinne, dass sie die ZB identisch erfüllen. Wäre dies der Fall, könnte man die ZK nicht berechnen.

Außerdem liegt ein Beispiel mit $\lambda(t) = \lambda(r(t),\dot{\varphi}(t))$ vor, d.h., die ZK hängt von der realisierten Bahnkurve ab. r(t) oder $\dot{\varphi}(t)$ kann man über $m r^2\dot{\varphi} = L_z$ eliminieren.
Es wäre wünschenswert, einige Trajektorien durch numerische Integration zu ermitteln und grafisch darzustellen, bzw. gleich ein Applet zu entwickeln.

■ Kettenlinie

Ein klassisches Variationsproblem mit Nebenbedingung ist die Beantwortung der Frage: Welche Kurve y(x) beschreibt die Gleichgewichtslage eines Seils/einer Kette, das/die an zwei Punkten P_1 und P_2 im Schwerefeld der Erde aufgehängt ist.

Die Gleichgewichtslage ergibt sich aus der Bedingung minimaler potenzieller Energie

$$U[y(x)] = \int_1^2 dm\, g\, y = g\rho \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{dx\sqrt{1+y'^2}}_{ds}\; y =: \int_{x_1}^{x_2} dx\; f(y,y',x) \;\to \text{Min}\,,$$

Skizze

wobei wir die Dichte ρ als konstant angesehen haben. s bezeichnet die Bogenlänge und y' steht für die Ableitung der Funktion y nach x steht. Das Minimum des Funktionals U[y(x)] ist unter der Nebenbedingung konstanter Seillänge l

$$l[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+y'^2} = \text{const}$$

zu bestimmen. Im Sinne der Methode der Lagrange-Multiplikatoren haben wir anstelle der "Lagrange-Funktion" f(y,y',x) zur Berücksichtigung der Nebenbedingung Das Funktional

$$\tilde{f}(y,y',x) = \sqrt{1+y'^2}\;(y-\lambda)$$

zu betrachten (der konstante Faktor ρ g ist unerheblich für die "Bewegungsgleichung"). Da $\tilde{f}$ die unabhängige Variable x (die "Zeit") nicht enthält, besitzen die dazugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen ein erstes Integral, die "Energie"

$$\text{const} = \tilde{f} - \frac{\partial\tilde{f}}{\partial y'}y' = \sqrt{1+y'^2}\;(y-\lambda) - (y-\lambda)\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = (y-\lambda)\left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right).$$

Also ist

$$\frac{y-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} =: A = \text{const} \quad \text{oder} \quad y'^2 = \frac{(y-\lambda)^2}{A^2} - 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{\sqrt{\frac{(y-\lambda)^2}{A^2} - 1}} = dx\,.$$

Mit der Substitution $\cosh z = \frac{y-\lambda}{A}$, d.h. $dy = A \sinh z \, dz$ folgt unter Ausnutzung von

$\cosh^2 z - 1 = \sinh^2 z$ sofort $\frac{A \sinh z \, dz}{\sinh z} = dx$, also $A z = x + B'$ oder $z = \frac{x}{A} + B$. Daraus

ergibt sich nach Rücktransformation über $z = \cosh\left(\frac{x}{A} + B\right) = \frac{y-\lambda}{A}$ letztendlich die gesuchte

Funktion

$$y(x) = A \cosh\left(\frac{x}{A} + B\right) + \lambda\,.$$

Der Lagrange-Parameter λ und die Integrationskonstanten A und B werden aus den Rand- und der Nebenbedingung bestimmt.

Wählen wir z.B. als Aufhängepunkte der Kette $P_1 = (x_1, y_1) = (-1{,}0)$ und $P_2 = (x_2, y_2) = (1{,}0)$, so ergeben sich die beiden Bedingungen

$$0 = A \cosh\left(-\frac{1}{A} + B\right) + \lambda \quad \text{und} \quad 0 = A \cosh\left(\frac{1}{A} + B\right) + \lambda\,,$$

Skizze

also B = 0 (denn cosh x ist eine gerade Funktion), d.h., $-A \cosh\frac{1}{A} = \lambda$, und somit

$$y(x) = A \cosh\frac{x}{A} - A \cosh\frac{1}{A}\,.$$

Für die noch unbekannte Konstante A finden wir unter Verwendung der Nebenbedingung mit

$y' = \frac{dy}{dx} = \sinh\frac{x}{A}$, $\sqrt{1+y'^2} = \cosh\frac{x}{A}$ die transzendente Gleichung

$$1 = \int_{-1}^{1} dx \sqrt{1+y'^2} = A \sinh\frac{1}{A}\Big|_{-1}^{1} = 2 A \sinh\frac{1}{A} = 1$$

zur Bestimmung von A bei gegebener Seillänge l.

<u>Beachte</u>: Wegen der Existenz des ersten Integrals war es ist nicht erforderlich, die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'}\right)-\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right)=0$ selbst zu lösen.

• Zusatz: **Geodäten**

Geodätische Linien oder Geodäten auf der Fläche $g(x,y,z)=0$ im R^3 sind Kurven $y=y(x)$ und $z=z(x)$, die zwei Punkte $P_1=(x_1,y(x_1),z(x_1))$ und $P_2=(x_2,y(x_2),z(x_2))$ auf dem kürzesten Weg verbinden.

Also ist zu ihrer Berechnung

$$F[y(x),z(x)]=\int_{P_1}^{P_2} ds=\int_{x_1}^{x_2} dx\,\sqrt{1+y'^2+z'^2}\;\rightarrow\;\text{Min}$$

zu fordern, oder in Parameterform

$$F[x(t),y(t),z(t)]=\int_{t_1}^{t_2} dx\,\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\;\rightarrow\;\text{Min}\,.$$

Vorgehensweise: Löse die Euler-Lagrange-Gleichung für

$$\tilde{f}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}-\lambda(t)\,g(x,y,z)$$

und bestimme $\lambda(t)$ aus $g(x,y,z)=0$.

■ Im Fall der Kugeloberfläche $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2=0$ sind die Geodäten Kreise mit dem Umfang $2\pi R$ auf der Kugeloberfläche.

- **Berücksichtigung von Reibungskräften, Rayleigh´sche Dissipationsfunktion**

Bisher haben wir keine Reibungskräfte im Lagrange-Formalismus berücksichtigt. Um dies zumindest für einen wichtigen Spezialfall tun zu können, gehen wir nun zurück zu Kap. 1.4.9, indem wir die Newton´sche BG in krummlinigen Koordinaten geschrieben haben

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \quad \xrightarrow{\underline{r}=\underline{r}(\underline{q}),\ \dot{\underline{r}}=\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k}\cdot\dot{q}_k,\ \ddot{\underline{r}}=\ldots} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)=0,\ k=1,\ldots,f=3N-R \quad .$$

$$\underline{r}=(r_1,\ldots,r_{3N}) \qquad \underline{q}=(q_1,\ldots,q_f)$$

Nach einigen Umformungen waren wir bei

$$\underline{F}\cdot\underline{e}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_k}\right)-\left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_k}\right) \quad \text{(H5)} \quad \text{mit} \quad \underline{e}_k(\underline{q}) := \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k}$$

angelangt und hatten die linke Seite unter der Annahme, die Kraft $\underline{F}$ sei konservativ, weiter vereinfacht. Nun werden wir $\underline{F}$ wie im Kapitel (1.4.8) bei der Diskussion zum Energieerhaltungssatz für Massepunktsysteme in einen konservativen und einen dissipativen Anteil zerlegen

$$\underline{F}\cdot\underline{e}_k = \underline{F}^{(K)}\cdot\underline{e}_k + \underline{F}^{(D)}\cdot\underline{e}_k \ .$$

Den konservativen Anteil Kraft formen wir wie gehabt um

$$\underline{F}^{(K)}\cdot\underline{e}_k = -\frac{\partial U}{\partial \underline{r}}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial U}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U(\underline{q},t)}{\partial q_k} \ .$$

Für die Komponenten des dissipativen Anteils der Kraft machen wir den (stark vereinfachenden!) Ansatz

$F_i^{(D)} = -\gamma_i\,\dot{r}_i \qquad \rightarrow \quad$ Reibungskräfte proportional zur Geschwindigkeit, mit konstanten Reibungskoeffizienten γ_i und definieren die Funktion

$$D(\underline{q},\underline{\dot{q}},t) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\gamma_i}{2} \left[\dot{r}_i(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)\right]^2$$

$\rightarrow$ **Rayleigh´sche Dissipationsfunktion**

Dann folgt

$$\underline{F}^{(D)} \cdot \underline{e}_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(D)} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{3N} \gamma_i \, \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \overset{\therefore}{=} -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial D(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)}{\partial \dot{q}_k}.$$

Im Zusammenhang mit der Umformung $\overset{\therefore}{=}$ ist zu beachten: $r_i = r_i(\underline{q},t)$ impliziert $\frac{dr_i}{dt} \equiv \dot{r}_i = \underline{\frac{\partial r_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial r_i(\underline{q},t)}{\partial q_k} \dot{q}_k} =: \dot{r}_i(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$. Diese Beziehung definiert $\underline{\dot{r}}(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$ als Funktion von $\underline{q}$, $\underline{\dot{q}}$ und t, für die offensichtlich $\frac{\partial \dot{r}_i(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i(\underline{q},t)}{\partial q_k}$ gilt.

Damit lauten die Lagrange-Gleichungen II. Art im Fall linear von der Geschwindigkeit abhängender Reibungskräfte

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1,\dots,f.$$

- **Historische Anmerkung: D`Alembert´sches Prinzip** (nächste Woche)