Vorlesung: Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, Dr. Philipp Hövel
Übungen: Arash Azhand, Judith Lehnert, Ken Lichtner, Andrea Vüllings,
Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya, Robert Kohlhaas

10. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Mi. 15.01.2014 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweier- oder Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an.

Aufgabe 22 (4 Punkte): *Legendre-Transformation (1+1+2=4 Punkte)*

Berechnen Sie die Legendre-Transformierten der Funktionen:

1. $f(x) = (x + \alpha)^2$,
2. $g(x, y) = \beta x^2 y^4$ (nur nach y),
3. $h(x) = \gamma x^3 + \delta$,

wobei α, β, γ und δ Konstanten sind und $x, y \in \mathbb{R}$ (!). Berechnen Sie zudem die Rücktransformation. Veranschaulichen Sie sich bildlich, warum die Legendre-Transformation streng genommen nur für konvexe Funktionen eindeutig ist. Bei welcher der obigen Funktionen stößt man deshalb auf Probleme?

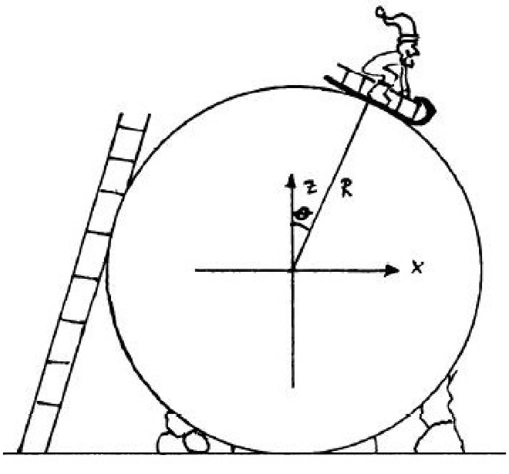
Aufgabe 23 (4 Punkte): *Hamilton-Formalismus (2+1+1=4 Punkte)*

Betrachen Sie ein Fadenpendel der Länge l und der Masse m.

1. Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion H.
2. Zeigen Sie, dass H mit der konstanten Gesamtenergie E identisch ist. Diskutieren Sie für kleine Winkel die Bahn des Systems im (q, p)-Phasenraum!
3. Leiten Sie nun ohne Verwendung der Kleinwinkelnäherung aus den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen die Schwingungsgleichung her!

Aufgabe 24 (12 Punkte): *Weihnachtsmann auf Kugel (2 Punkte pro Teilaufgabe)*

Ein (fast) punktförmiger Weihnachtsmann der Masse m liegt in Ruhe auf dem obersten Punkt $(\theta = 0)$ einer glatten Kugel (Radius R). Durch eine infinitesimal kleine Störung beginnt er nun reibungsfrei auf der Kugeloberfläche herunterzugleiten. Es soll berechnet werden, bei welchem Winkel der Weihnachtsmann abhebt.



1. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für eine allgemeine, freie Bewegung eines Massenpunktes im Schwerefeld ($\underline{g} = -g\underline{e}_z$) in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ). Wie lautet die zu ϕ gehörige Erhaltungsgröße? Überzeugen Sie sich, dass die Variable ϕ aus der Langrange-Funktion eliminiert werden kann. Betrachten Sie im Folgenden das 2-dim. Problem mit der reduzierten Lagrange-Funktion $L_0 = L_0(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$.

Bitte Rückseite beachten! $\longrightarrow$

2. Um das eigentliche Problem des Weihnachtsmanns auf der Kugel zu lösen, muss zusätzlich zur Lagrange-Funktion die Nebenbedingung $r = R$ erfüllt sein. Dazu koppelt man die Nebenbedingung an L_0 und definiert als neue Lagrange-Funktion:

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, \lambda, \dot{\lambda}) = L_0 + \lambda(r - R).$$

Hierbei kann λ als zusätzliche generalisierte Variable angesehen werden. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Gleichungen für L äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen 1. Art für L_0 (inklusive Nebenbedingung!) sind.

3. Bestimmen Sie die generalisierten Impulse (inklusive p_λ!). Zum Aufstellen der Hamilton-Funktion müssen alle generalisierten Geschwindigkeiten durch Impulse ersetzt werden. Dies gelingt im vorliegenden Fall nicht für alle dynamischen Variablen. Bestimmen Sie deshalb die Hamilton-Funktion aus

$$H(r, p_r, \theta, p_\theta, \lambda, p_\lambda, \alpha) = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + \alpha p_\lambda - L\,,$$

mit einer zusätzlichen Variable α.

4. Bestimmen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen durch Variation der Wirkung

$$S[r, p_r, \theta, p_\theta, \lambda, p_\lambda, \alpha] = \int_{t_1}^{t_2} dt (p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\lambda \dot{\lambda} - H)$$

nach allen(!) Variablen. Benutzen Sie die Bewegungsgleichungen der Variablen λ und p_λ um die Variable α aus der obigen Wirkung zu eliminieren. Von welchen Variablen hängt die neue Wirkung nur noch ab? Was passiert dadurch mit der Variable λ?

5. Lösen Sie nun die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für die Variable θ. Bestimmen Sie mit Hilfe der übrigen Bewegungsgleichungen den Winkel θ_0 bei dem sich der Weihnachtsmann von der Kugeloberfläche löst.

6. An welchem Punkt $(\bar{x}, 0, -R)$ schlägt der Weihnachtsmann am Boden auf?

Vorlesung:	• Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201. • Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/?mechanik13
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen.) • Bestandene Klausur. • Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Klausur:	• Mittwoch 12.02.2014, 8:00 Uhr s.t., ER 270. • Nachklausur: Dienstag 08.04.2014, 10:00 Uhr s.t., Raum wird noch bekannt gegeben