Vorlesung: Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, Dr. Philipp Hövel
Übungen: Arash Azhand, Judith Lehnert, Ken Lichtner, Andrea Vüllings,
Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya, Robert Kohlhaas

3. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: Mo. 11.11.2013 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweier- oder Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an.

Aufgabe 5 (9 Punkte): *Zentralkraft und Drehimpulserhaltung (2+2+3+2=9 Punkte)*

(1) Was ist eine Zentralkraft? Nennen Sie zwei Beispiele!

(2) Skizzieren Sie in eigenen Worten (ohne ausführliche Rechnungen, kurze Formeln sind erlaubt), wie der Radialteil einer Bewegung im Zentralfeld als eindimensionale Bewegung in einem Feld mit effektiven Potential $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ formuliert werden kann.

(3) Diskutieren Sie qualitativ die möglichen Bahnkurven für die Fälle (i) $V(r) = -\alpha/r$, (ii) $V(r) = \alpha\, r^2$ und (iii) $V(r) = -\alpha/r^3$, wobei $\alpha > 0$ gilt. *Hinweis:* Für Visualisierung des Potenzials ist das Kepler-Applet hilfreich, das unter folgender Internetadresse zu finden ist: `http://www.tu-berlin.de/index.php?id=8125`.

(4) Begründen Sie, für welche Potenziale in (3) alle Bahnkurven geschlossen sind.

Aufgabe 6 (11 Punkte): *Periheldrehung (2+6+3=11 Punkte)*

Nach der Newton'schen Gravitationstheorie ist die potenzielle Energie einer kleinen Masse m im Schwerefeld einer großen Masse M durch $V_N(r) = -\frac{\gamma m M}{r}$ gegeben (γ : Gravitationskonstante). Bewegt der kleine Körper sich allerdings sehr nahe am Zentralkörper (M), zeigt die Beobachtung, dass dieses Gesetz nicht exakt gilt. Nach der Einstein'schen Gravitationstheorie muss die Newton'sche Form des effektiven Potenzials modifiziert werden, indem man einen Zusatzterm einführt. Das effektive Radialpotenzial hat dann die Form

$$V_{\text{eff}}(r) = \underbrace{-\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{Newton}} - \underbrace{\frac{\gamma M L^2}{c^2 m r^3}}_{\text{Einstein}} \quad \text{mit } k = \gamma m M,$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c und dem Drehimpuls L.

(a) Die resultierende *Bahngleichung* lautet:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mr^4}{L^2}\left(E - V_{\text{eff}}(r)\right).$$

Zeigen Sie, dass man für den inversen Abstand $u(\varphi) := 1/r(\varphi)$ die folgenden *Orbitgleichungen*

$$(1) \qquad \text{ohne Einstein'schen Zusatzterm:} \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M m^2}{L^2}$$

$$(2) \qquad \text{mit Einstein'schem Zusatzterm:} \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M m^2}{L^2} + \frac{3\gamma M}{c^2}u^2$$

erhält.

(b) Die Orbitgleichung hat im Newton'schen Fall die Lösung:

$$u_N(\varphi) = \frac{\gamma m^2 M}{L^2}(1 + \epsilon \cos\varphi).$$

Diese Lösung ist eine Ellipse mit Perihel (sonnennächster Punkt der Bahnkurve) bei $\varphi = 0$. Da für Objekte im Sonnensystem der Einfluss des Einstein'schen Zusatzterms klein ist, ist diese Lösung weiterhin eine gute Näherung. Deshalb ist es zweckmäßig den Ansatz $u(\varphi) = u_N(\varphi) + \Delta u(\varphi)$ zu wählen. Setzen Sie diesen Ansatz in die Gleichung (2) ein und bringen Sie diese auf die Form

$$\Delta u'' + \Delta u = \frac{3\gamma M}{c^2}(\Delta u^2 + 2u_N \Delta u + u_N^2).$$

Wir nehmen an, dass $\Delta u(\varphi) \ll u_N(\varphi)$.

In guter Näherung gilt also:

$$\Delta u'' + \Delta u = \frac{3\gamma M}{c^2} u_N^2.$$

Lösen Sie diese lineare Differentialgleichung analytisch mit einem Computer-Algebra-System und setzen Sie die Anfangswerte $\Delta u(0) = 0$ und $\Delta u'(0) = 0$ ein.

(c) Das *Perihel* eines Planeten ist der sonnennächste Punkt der Bahnkurve. Das Perihel ist daher ein lokales Maximum des Funktion $u(\varphi)$. Dieser Punkt liegt bei der korrigierten Bahnkurve nicht konstant bei $(\varphi \mod 2\pi) = 0$, sondern verschiebt sich mit jedem Umlauf des Planeten. Diese Periheldrehung ist allerdings sehr klein, so dass wir das Perihel nach einem Umlauf in der Nähe von $\varphi = 2\pi$ erwarten. Bestimmen Sie **numerisch** die Nullstelle von $u'(\varphi)$ in der Nähe von 2π, d.h. bestimmen Sie ϵ, so dass $u'(2\pi+\epsilon) = 0$ ist, für das System Sonne-Merkur (Daten siehe unten). Rechnen Sie den Wert in Bogensekunden pro Jahrhundert um, und freuen Sie sich, wenn etwa 43"/100a auf dem Bildschirm erscheinen.

Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie die richtige Formel für den Drehimpuls exzentrischer Bahnen benutzen. Vernachlässigt man die Exzentrizität ist das Ergebnis um etwa 2" falsch.

Bemerkung: Dieser Wert war schon Ende des 19. Jahrhunderts bekannt, konnte aber damals nicht erklärt werden. Daher war dieses Ergebnis die erste Bestätigung der neuen Einstein'schen Gravitationstheorie (Allgemeine Relativitätstheorie) im Jahr 1915.

	MERCURY	VENUS	EARTH	MARS
Mass ($10^{24}kg$)	0.330	4.87	5.97	0.642
Diameter (km)	4879	12104	12756	6792
Distance from Sun ($10^6 km$)	57.9	108.2	149.6	227.9
Orbital Period (days)	88.0	224.7	365.2	687.0
Orbital Eccentricity	0.205	0.007	0.017	0.094

(Quelle NASA: `http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/`)

Vorlesung:
- Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.
- Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/?mechanik13

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen.)
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Klausur:
- Mittwoch 12.02.2014, 8:00 Uhr s.t., ER 270.
- Nachklausur: Dienstag 08.04.2014, 10:00 Uhr s.t., Raum wird noch bekannt gegeben