Prof. Dr. Harald Engel
Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Maria Zeitz, Julian Böll, Alexander Ziepke

5. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Fr. 22.05.2015 bis 14 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 11 (2.5+2.5+1=6 Punkte): *Quantenmechanische Erwartungswerte*

Berechnen Sie für die Grundzustandswellenfunktion $\psi(x)$ des harmonischen Oszillators

$$\psi(x) = (\frac{m\omega}{\hbar\pi})^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

die folgenden Größen

(a) $\langle x \rangle,\ \langle x^2 \rangle$,

(b) $\langle p \rangle,\ \langle p^2 \rangle$.

Beweisen Sie folgende Relation für das Produkt der mittleren quadratischen Abweichungen bei Messung vor Ort und Impuls eines quantenmechanischen Teilchens im Grundzustand $\psi(x)$ des harmonischen Oszillators:

(c)

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

Hinweis: $\hat{x} = x$ ist der Ortsoperator, $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ der Impulsoperator.
Die mittlere quadratische Abweichung ΔA vom Mittelwert einer Größe A ist gegeben durch $\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$.

Aufgabe 12 (4+1=5 Punkte): *Hermitesche (selbstadjungierte) Operatoren*
Ein Operator $\hat{A}^\dagger$ ist adjungiert zu $\hat{A}$ wenn

$$\langle \phi | \hat{A} \psi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \phi | \psi \rangle$$

für alle Zustände ψ, ϕ gilt. Ein Operator heißt hermitesch, wenn ferner $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ gilt.

(a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Operatoren hermitesch sind:

$$\hat{A}_1 = \hat{x}\hat{p}\ , \qquad \hat{A}_2 = \hat{p}\hat{x}\ , \qquad \hat{A}_3 = 1/2(\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p})\ , \qquad \hat{A}_4 = \hat{Q}^\dagger \hat{Q}.$$

$\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ ist der Impulsoperator ist. $\hat{Q}$ sei ein beliebiger Operator.

(b) Zeigen Sie, dass für zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt

$$\langle [\hat{B}, \hat{A}] \rangle \quad = \quad \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^*.$$

Dabei ist $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ der Kommutator.

Aufgabe 13 (2+7=9 Punkte): *Lineare Operatoren*

(a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{F}(\hat{x}), \hat{p}]$ und $[\hat{F}(\hat{p}), \hat{x}]$.

Hinweis: Verwenden Sie zu Berechnung des Kommutators $[\hat{F}(\hat{p}), \hat{x}]$ die Impulsdarstellung.

(b) Zeigen Sie folgende Behauptungen unter der Bedingung, dass $\left[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}\right] = \left[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}\right] = 0$ gilt:

1. $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$
2. $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} e^{[\hat{A},\hat{B}]}$

Hinweis: Betrachten Sie in Punkt 1 die Funktionen $f(t) = e^{t(\hat{A}+\hat{B})}$ und $g(t) = e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}} e^{-t^2[\hat{A},\hat{B}]/2}$. Zeigen Sie, dass diese Funktionen der gleichen linearen DGL zu gleichen Anfangswerten gehorchen (unter Ausnutzung der hier unbewiesenen Relation $e^{\hat{A}}\hat{B} = (\hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}])e^{\hat{A}}$). Analog für Punkt 2 mit den Funktionen $f(t) = e^{t\hat{A}} e^{\hat{B}}$ und $g(t) = e^{\hat{B}} e^{t\hat{A}} e^{[t\hat{A},\hat{B}]}$.

Wochenplan					
	Mo	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**
08-10		EW 202 HE	EW 202 HE		
10-12				EW 229 JB	EW 229 MZ
12-14	EW 114 AZ EW 229 JB			EW 229 AZ	
14-16					
16-18			EW 114 JL EW 229 BL		

Sprechstunden			
HE	Prof. Dr. Harald Engel	Mi 14:30-16	EW 738
AZ	Alexander Ziepke	Mi 14-15	EW 060
BL	Benjamin Lingnau	Di 14-15	EW 629
JB	Julian Böll	Mi 15-16	EW 060
JL	Judith Lehnert	Mo 15-16	ER 246
MZ	Maria Zeitz	Do 14-15	EW 702