Vorlesung: Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, Dr. Philipp Hövel
Übungen: Arash Azhand, Judith Lehnert, Ken Lichtner, Andrea Vüllings,
Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya, Robert Kohlhaas

# 8. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

**Abgabe: Mi. 18.12.2013 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweier- oder Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an.*

**Aufgabe 15 (3 Punkte):** *Erhaltungsgrößen mit Lagrange II*

Die Position eines Teilchens werde durch Zylinderkoordinaten $(\rho, \phi, z)$ beschrieben. Die potentielle Energie des Teilchens sei

$$V(\rho) = V_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \text{ mit } V_0 = \text{const und } \rho_0 = \text{const.}$$

a) Wie lautet die Lagrange-Funktion?

b) Stellen Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen auf.

c) Finden und benennen Sie mindestens zwei Erhaltungsgrößen.

**Aufgabe 16 (8 Punkte):** *Rayleighsche Dissipationsfunktion*

Reibungskräfte erfüllen nicht das d'Alembertsche Prinzip und können daher nicht wie Zwangskräfte behandelt werden. Die *Rayleighsche Dissipationsfunktion*

$$D = \tfrac{1}{2} \sum_{l=1}^{f} \sum_{m=1}^{f} \beta_{lm} \dot{q}_m \dot{q}_l$$

für $f$ generalisierte Koordinaten $q$ liefert eine Möglichkeit, um Reibungskräfte, die linear in den Geschwindigkeiten der generalisierten Koordinaten angenommen werden, an die Lagrangegleichungen eines ansonsten konservativen, holonomen und skleronomen Systems anzukoppeln:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -2D$$

gilt.

Hinweis: Mit den gestellten Bedingungen gilt $\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$

**Aufgabe 17 (6 Punkte):** *Erhaltungsgrößen und Symmetrien*

Ist die Lagrange-Funktion $L(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$ eines (holonomen, konservativen) Systems invariant unter einer kontinuierlichen Transformation $\underline{q} \to \underline{q}' = h^s(\underline{q})$ mit $h^{s=0}(\underline{q}) = \underline{q}$, dann gibt es eine Erhaltungsgröße (Integral der Bewegung) der Form:

$$I = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{ds} h(q_i)\right)_{s=0}.$$

Tatsächlich reicht es zu fordern, dass die Transformation zu einer Umeichung der Lagrange-Funktion führt:

$$L(\underline{q}', \dot{\underline{q}}') = L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) + s \frac{d}{dt} f(\underline{q}, t).$$

Die Erhaltungsgröße ergibt sich dann zu

$$I = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{d}{ds} h(q_i) \right)_{s=0} - f(\underline{q}, t).$$

Betrachten Sie folgende Lagrange-Funktion eines Teilchens der Ladung $e$ im konstanten, homogenen elektrischen Feld:

$$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \tfrac{1}{2} m \underline{\dot{q}}^2 + e \underline{E} \underline{q}.$$

Dieses System ist invariant unter räumlichen Translationen.

a) Geben Sie die Translationstransformation $h^s(\underline{q})$ für eine beliebige Raumrichtung an.

b) Zeigen Sie, dass damit für obige Lagrange-Funktion die Invarianzbedingung erfüllt ist.

c) Geben Sie die zugehörige Erhaltungsgröße an.

d) Welche Bedeutung hat das Ergebnis?

**Aufgabe 18 (3 Punkte):** *Drehmatrizen*
Eine infinitesimale Drehung um eine Achse lässt sich darstellen über die Drehmatrix

$$\underline{\underline{R}}_i(\varphi) = \exp(-\underline{\underline{J}}_i \varphi), \qquad i \in \{x, y, z\},$$

wobei $\underline{\underline{J}}_i$ die Erzeugende der Drehung ist:

$$\underline{\underline{J}}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{J}}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{J}}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Kommutator zweier Matrizen $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$ ist definiert als $[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$. Zeigen Sie, dass $[\underline{\underline{J}}_i, \underline{\underline{J}}_j] = \underline{\underline{J}}_k$ gilt, wobei $(i, j, k)$ eine zyklische Permutation von $(x, y, z)$ ist.

| | |
|---|---|
| Vorlesung: | • Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.<br>• Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201. |
| Webseite: | • Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/?mechanik13 |
| Scheinkriterien: | • Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen.)<br>• Bestandene Klausur.<br>• Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien. |
| Klausur: | • Mittwoch 12.02.2014, 8:00 Uhr s.t., ER 270.<br>• Nachklausur: Dienstag 08.04.2014, 10:00 Uhr s.t., Raum wird noch bekannt gegeben |