Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 2. Juni 2015
http://www.tu-berlin.de/?qm15

Prof. Dr. Harald Engel
Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Maria Zeitz, Julian Böll, Alexander Ziepke

8. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Fr. 12.06.2015 bis 14 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 19 (1+2+3+3=9 Punkte): *Bewegungsgleichungen im Heisenbergbild*
Im Schrödinger-Bild sei ein Einteilchen-Hamiltonian in einer Dimension gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}).$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für die fundamentalen Vertauschungsrelationen im Heisenberg-Bild $[\hat{x}_H, \hat{p}_H] = i\hbar$ und $[\hat{x}_H, \hat{x}_H] = [\hat{p}_H, \hat{p}_H] = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator im Heisenbergbild durch

$$\hat{H}_H(t) = \frac{1}{2m}\hat{p}_H^2 + V(\hat{x}_H)$$

gegeben ist. Tipp: Stellen Sie als Zwischenschritt $V(x)$ als Taylor-Reihe dar.

(c) Zeigen Sie, dass Orts- und Impulsoperator eines Teilchen im Heisenberg-Bild den "klassischen" Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_H = \frac{1}{m}\hat{p}_H \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\hat{p}_H = -\frac{dV}{d\hat{x}_H}(\hat{x}_H)$$

genügen.

(d) Betrachten Sie im Folgenden den harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(\hat{x}) = \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2$ und geben Sie die Differentialgleichung für $\hat{x}_H$ an. Lösen Sie diese. Für $t = 0$ gelte: $\hat{x}_H = \hat{x}$ und $\hat{p}_H = \hat{p}$.

Aufgabe 20 (2+1+1+1=5 Punkte): *Drehimpulsoperator*
In der Vorlesung wurde der Drehimpulsoperator $\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$ eingeführt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen!

(i) $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k$, (*Hinweis:* $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$.)

(ii) $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_j] = 0$.

(iii) $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$, wobei $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ gilt.

(iv) Falls ein Operator mit zwei Komponenten des Drehimpulsoperators kommutiert, so kommutiert er auch mit der dritten Komponente.

Aufgabe 21 (1.5+1.5+1+2=6 Punkte): *Drehimpulsoperator II*
Aus Aufgabe 20 (ii) wissen wir nun also, dass $\hat{\mathbf{L}}^2$ und (z.B.) $\hat{L}_z$ ein gemeinsames System von Eigenzuständen $|lm\rangle$ besitzen. Es gelten die Eigenwertgleichungen:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 |lm\rangle = \hbar^2 l(l+1) |lm\rangle \ , \quad \hat{L}_z |lm\rangle = \hbar m |lm\rangle \, .$$

Ferner gilt:

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i \hat{L}_y \qquad \hat{L}_\pm |lm\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \, |lm \pm 1\rangle \, .$$

(a) Berechnen Sie $\langle lm| \hat{L}_i |lm\rangle$ für $i \in \{x, y, z\}$.

(b) Berechnen Sie $\Delta L_i = \langle lm| \left(\hat{L}_i - \langle \hat{L}_i \rangle \right)^2 |lm\rangle$ für $i \in \{x, y, z\}$.

(c) Für welches m (bei gegebenen l) wird die kleinste Streuung $\Delta \hat{L}_x$ bzw. $\Delta \hat{L}_y$ erreicht?

(d) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es zu gegebenem l genau $m = 2l + 1$ Einstellungen gibt. Nehmen Sie im Folgenden $l = 1$ an. Es ergeben sich also 3 mögliche Werte für m. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\hat{L}_+$ und $\hat{L}_-$ an und berechnen Sie nun mit Hilfe dieses Ergebnisses auch die Matrixdarstellung von $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$.

Wochenplan

	Mo	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**
08-10		EW 202 HE	EW 202 HE		
10-12				EW 229 JB	EW 229 MZ
12-14	EW 114 AZ EW 229 JB			EW 229 AZ	
14-16					
16-18			EW 114 JL EW 229 BL		

Sprechstunden

HE	Prof. Dr. Harald Engel	Mi 14:30-16	EW 738
AZ	Alexander Ziepke	Mi 14-15	EW 060
BL	Benjamin Lingnau	Di 14-15	EW 629
JB	Julian Böll	Mi 15-16	EW 060
JL	Judith Lehnert	Mo 15-16	ER 246
MZ	Maria Zeitz	Do 14-15	EW 702