Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Julia Kabuß, Dr. Judith Lehnert,
Dr. Marten Richter, Dr. Torben Winzer

2. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Do. 05. November 2015 bis 8:30 Uhr im Hörsaal

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und die Übung an!*

Aufgabe 4 (8 Punkte): *Klein–Gordon-Theorie des Atoms (2.5+3+2.5=8 Punkte)*

Untersuchen Sie das Spektrum eines Atoms der Kernladungszahl Z im Rahmen der Klein–Gordon-Theorie.

(a) Bringen Sie dazu die Klein–Gordon-Gleichung für ein geladenes relativistisches Teilchen in einem Coulomb-Potential ($\mathbf{A} = \mathbf{0}, q\Phi(r) = -\frac{Z\alpha}{r}\hbar c$) mit Hilfe eines Separation-Ansatzes für stationäre Lösungen mit positiver Energie auf die Form

$$\left[\left(E + Z\alpha\frac{\hbar c}{r}\right)^2 + \left(m_0c^2\right)^2\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \ell(\ell+1)\left(m_0c^2\right)^2\frac{\lambda^2}{r^2} - \left(m_0c^2\right)^2\right]R(r) = 0. \tag{1}$$

Hier ist $\alpha \approx 1/137$ die Feinstrukturkonstante und $\lambda = \hbar/(m_0c)$ die Compton-Wellenlänge.

(b) Vergleichen Sie das Eigenwertproblem (1) mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass das Spektrum durch

$$E_{n'}^2 = \frac{\left(m_0c^2\right)^2}{1 + Z^2\alpha^2/n'^2} \tag{2}$$

bestimmt ist. Hier ist $n' \in \mathbb{Z}^+$.

(c) Entwickeln Sie die Eigenenergien $E_{n'}$ bis zur vierten Ordnung in $Z\alpha$. Beachten Sie dabei, dass n' über das entsprechende ℓ' von $Z\alpha$ abhängt.

Aufgabe 5 (6 Punkte): *Pauli-Matrizen*
Die drei Pauli-Matrizen, σ_i ($i \in \{1,2,3\}$), sind unitär, hermitesch und erfüllen die Gleichung $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 = i\,\mathbb{1}$.

(a) Zeigen Sie , dass die Pauli-Matrizen die Kommutator-Ralation, $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk}\sigma_k$, und die Antikommutator-Relation, $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\,\mathbb{1}$, erfüllen.

(b) Zeigen Sie damit, dass $\sigma_i\sigma_j = i\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1}$ gilt.

(c) Zeigen Sie damit nun folgende Identität:

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\ .$$

Hier ist $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ein Vektor mit den drei Pauli-Matrizen als Einträge und $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ sind Vektoren mit drei Skalaren als Einträge.

Aufgabe 6 (4 Punkte): *Erhaltungsgrößen in der Dirac-Theorie*
Der Dirac-Hamiltonian eines freien Teilchens ist $\hat{H} = c\sum_{k=1}^{3} \hat{\alpha}^k \hat{p}_k + \hat{\beta} m_0 c^2$. Die Komponenten des Spinoperators $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$ sind durch $\hat{S}_k = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ nicht mit $\hat{H}$ vertauscht. Nutzen Sie dafür die Vertauschungsrelationen des Orts- und Impulsoperators.

(b) Zeigen Sie, dass der Spinoperator ebenfalls nicht mit $\hat{H}$ vertauscht.

(c) Zeigen Sie schließlich, dass jedoch der Gesamtdrehimpuls $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ mit $\hat{H}$ vertauscht.

Vorlesung:

Di. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203,
Do. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und **aktive** Teilnahme in den Übungen und **mindestens einmal vorrechnen** in der eingeteilten Übung.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik (Springer)
- U. Scherz, Quantenmechanik (Teubner)
- F. Schwabl, Quantenmechanik für Fortgeschrittene (Springer)
- E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie (Aula-Verlag)
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 7: Vielteilchentheorie (Springer)