Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Judith Lehnert, Dr. Marten Richter, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Jonas Rezacek

4. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 24. Mai 2016 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Zettel müssen in 3er-Gruppen abgegeben werden. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (2+4+2+3=11 Punkte): *Diskrete Schödingergleichung*

Betrachten Sie die diskrete Version der Schrödingergleichung in einer Dimension, Skript Kap. 2.3.1, Gl. (2.114).

(a) Bestimmen Sie die normierten Eigenvektoren $|\alpha\rangle$ und die zugehörigen Eigenwerte E_α der Matrix H für den Fall von nur zwei Stützstellen $i = 0$ und $i = 1$. Nehmen Sie hierzu für H an, dass $\varepsilon_i = 0$. In diesem Fall ist H gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T & 0 \end{pmatrix}.$$

Welchen Randbedingungen entspricht das?

(b) Führen Sie die Rechnung numerisch aus (Mathematica, Python ...), z.B. für $n = 5$ (periodische Randbedingungen). Stellen Sie das ‘Spektrum’ der Eigenwerte E_α für $n = 100$ graphisch dar. Setzen Sie $T = 1$ in der Matrix des Hamiltonians H. Nehmen Sie wieder $\varepsilon_i = 0$ an. Geben Sie den Quelltext Ihres Programmes mit ab!

(c) Zeigen Sie, dass sich die Matrix H in Dirac-Notation als

$$H = T\sum_{l=0}^{n-1} (|l\rangle\langle l+1| + |l+1\rangle\langle l|) + T\,(|0\rangle\langle n| + |n\rangle\langle 0|)$$

schreiben lässt (periodische Randbedingungen). Wobei $\{|l\rangle\}$ ein Orthonormalsystem bildet.

(d) Machen Sie für die Eigenvektoren $|\alpha\rangle$ den Ansatz $|\alpha\rangle = \sum_{l=0}^{n} e^{i\alpha l}|l\rangle$ mit den Basis-Kets $|l\rangle$ und bestimmen Sie damit die möglichen Werte für α und E_α.

Aufgabe 2 (3+8 +(4) =11+(4) Punkte): *Harmonischer Oszillator*

Die Hermite-Polynome $H_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, lassen sich durch eine *erzeugende Funktion*

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n, \quad -\infty < x,\, t < \infty$$

definieren.

(a) Zeigen Sie hiermit die Formel

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}.$$

(b) Zeigen Sie nun, dass die Eigenzustände

$$\psi_n(x) \equiv N_n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

des harmonischen Oszillators orthogonal sind und dass für den Normierungsfaktor

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} n! 2^n}}.$$

gilt. Wir haben hier $\frac{m\omega}{\hbar} = 1$ gesetzt. Benutzen Sie dafür das folgende Kurvenintegral in der komplexen Ebene,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C dz \frac{z^m}{z^{n+1}} = \delta_{n,m}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

wobei die Kurve C um den Ursprung läuft, und leiten Sie damit zunächst die Darstellung

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C dz\, \frac{e^{2zx-z^2}}{z^{n+1}}$$

her.

(c) **Bonus:** Zeigen Sie explizit, dass die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators ein vollständiges Funktionensystem bilden. D.h. zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(x) \psi_n(x') = \delta(x - x')$$

gilt.

Hinweis: Benutzen Sie die obige Definitionsgleichung aus Teil (a) für die Hermite-Polynome und stellen Sie darin eine der Gauß-Funktionen durch ihre Fourier-Transformierte dar.