Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Judith Lehnert, Dr. Marten Richter, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Jonas Rezacek

7. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 14. Juni 2016 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Zettel müssen in 3er-Gruppen abgegeben werden. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (2.5+5+1.5=9 Punkte): *Radialanteil der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms*
In dieser Aufgabe soll der Radialanteil der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms hergeleitet werden. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Starten Sie mit Gl. (2.252) des Skriptes:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(r)\right]R(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}R(r)=0,$$

wobei $V(r)=-e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$ das Coulomb-Potential des Wasserstoffatomkerns ist. Substituieren Sie $R(r)=u(r)/r$. Reskalieren Sie dann den Radius mit Hilfe von $\rho=r/a_B$ wobei $a_B=4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ der Bohrsche Radius ist. Zeigen Sie so, dass $u(\rho)$ der Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}-\eta^2\right]u(\rho)=0$$

genügt, wobei $\eta^2=-2mEa_B^2/\hbar^2$.

(b) Benutzen Sie den Lösungsansatz

$$u(\rho)=e^{-\eta\rho}\rho^{l+1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\rho^k$$

und leiten Sie für die Koeffizienten a_k die Rekursionsformel

$$a_{k+1}=2\frac{\eta(l+k+1)-1}{(k+1)(k+2l+2)}a_k,\quad k=0,1,\ldots,$$

her.

(c) Die Wellenfunktion ist nur normierbar, wenn die Reihe aus Aufgabenteil (b) bei endlichen k, im Folgenden k_0 genannt, abbricht. Leiten Sie daraus die diskreten Energien des Wasserstoffatoms her:

$$E_n=-\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B}\frac{1}{n^2}=-\frac{\hbar^2}{2m_0a_B^2}\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\ldots,$$

wobei $n=k_0+l+1$ gilt. Welche Werte darf dabei l annehmen?

Aufgabe 2 (2+2+2+2.5+2.5=11 Punkte): *Wasserstoffatom*

Die normierte Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms ist gegeben durch

$$\psi(r,\theta,\phi) = \frac{a_B^{-3/2}}{\sqrt{\pi}}\,\exp(-r/a_B).$$

(a) Berechnen Sie den mittleren Abstand des Elektrons vom Kern.

(b) Berechnen Sie nun den wahrscheinlichsten Abstand des Elektrons vom Kern.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron innerhalb des Kerns zu finden (Kernradius ca. 10^{-15}m)?

(d) Plotten Sie nun, z. B. mit Mathematica, die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(r) = \int \sin\theta d\theta d\varphi\, r^2 |\Psi_{n,l,m}(r)|^2$ für

- die Zustände $l = 0$ mit $n = 1, 2, 3, 4$,
- die Zustände $n = 4$ mit $l = 0, 1, 2, 3$.

Verwenden Sie als Längenskala den Bohrschen Radius $a_B = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$. (Beachten Sie, dass die Laguerre-Polynome in Mathematica nicht die übliche Normierung haben.)

(e) Visualisieren Sie das Betragsquadrat der Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta,\phi)$ (zum Beispiel mit Hilfe des Kommandos `SphericalPlot3D` von Mathematica) für $l = 1$ mit $m = -1, 0, 1$ sowie für $l = 2$ mit $m = 0, 1, 2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): *Unschärferelation*

Beweisen Sie mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung (Skript (2.76)) die verallgemeinerte Unschärferelation

$$\triangle\hat{A}\triangle\hat{B} \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle\right|$$

zweier hermitescher Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$. $\langle\rangle$ bezeichnet hier den Erwartungswert eines Operators in einem reinen Zustand $|\Psi\rangle$, also $\langle\hat{A}\rangle = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$. Die Unschärfe (Standardabweichung) $\triangle\hat{A}$ ist wie folgt definiert

$$(\triangle\hat{A})^2 = \left\langle\left(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle\right)^2\right\rangle.$$