Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Judith Lehnert, Dr. Marten Richter, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Jonas Rezacek

9. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 28. Juni 2016 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Zettel müssen in 3er-Gruppen abgegeben werden. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (3+3+2=8 Punkte): *Störungstheorie*

Berechnen Sie die Eigenwerte des Zweizustandssystem mit dem effektiven Hamilton Operator:

$$H \equiv \frac{\varepsilon}{2}\sigma_z + T_c\sigma_x, \quad T_c \in \mathbb{R} > 0,$$

wobei $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ zwei der drei Pauli-Spinmatrizen sind.

a) Für $\varepsilon \neq 0$ unter Verwendung der Störungstheorie in T_c bis zur zweiten Ordnung.

b) Berechnen Sie nun das exakte Ergebnis. Vergleichen Sie die exakte Lösung mit der störungstheoretischen Lösung, indem Sie für die exakte Lösung eine Taylorentwicklung in T_c/ϵ durchführen.

c) Berechnen Sie nun die Eigenzustände in erster Ordnung Störungstheorie in T_c.

Aufgabe 2 (1+2=3 Punkte): *Verschränkte Zustände*

a) Betrachten Sie das 2-Qubit (zwei Systeme A und B),

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &\equiv a|00\rangle + b|11\rangle \equiv a|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + b|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B, \\ \rightsquigarrow \rho_A &= |a|^2|0\rangle\langle 0|_A + |b|^2|1\rangle\langle 1|_A, \end{aligned}$$

wobei ρ_A die reduzierte Dichtematrix für A ist. Für welche a, $b \in \mathbb{C}$ ist der Zustand $|\Psi\rangle$ verschränkt?

b) Gegeben sei nun das 2-Qubit

$$|\Psi\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle).$$

Berechnen Sie hierfür die reduzierte Dichtematrix ρ_A. Ist $|\Psi\rangle$ verschränkt? Falls nicht, schreiben Sie $|\Psi\rangle$ explizit als Produkt zweier Zustände $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A$ und $|\phi'\rangle \in \mathcal{H}_B$, das heißt in der Form $|\Psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi'\rangle_B$.

Aufgabe 3 (1.5+1.5+3.5+2.5+2=11 Punkte): *Spin 1/2-System und die reduzierte Dichtematrix*

Ein Spin 1/2 (System A) sei an ein Wärmebad (System B) mit N Zuständen gekoppelt. Das Gesamtsystem (A+B) befinde sich im normierten Zustand

$$|\Psi\rangle \equiv |\uparrow\rangle \otimes (\alpha_1|1\rangle + \ldots + \alpha_N|N\rangle) + |\downarrow\rangle \otimes (\beta_1|1\rangle + \ldots + \beta_N|N\rangle).$$

(a) Wie lautet die Dichtematrix ρ des Gesamtsystems? Unter welcher Bedingung gilt $\mathrm{Tr}\rho = 1$?

(b) Drücken Sie die reduzierte Dichtematrix ρ_A für das System A mittels der komplexen Koeffizientenvektoren $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ aus.

(c) Berechnen Sie den Erwarungswert $\langle\sigma_z\rangle$, indem Sie

  (i) die volle Dichtematrix ρ

  (ii) nur die reduzierte Dichtematrix ρ_A

  benutzen. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse. Hinweise: Nützlich ist es hier die Matrix/Vektor-Darstellung zu verwenden, dann ist $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $|\uparrow\rangle = (1,0)^T$ und $|\downarrow\rangle = (0,1)^T$.

(d) Berechnen Sie die Quadrate der Koeffizienten, λ_n^2, in der Schmidt-Zerlegung des Zustands, $|\Psi\rangle = \sum_n \lambda_n |c_n^{(A)}\rangle \otimes |c_n^{(B)}\rangle$, und überprüfen Sie explizit, dass ρ_A eine Dichtematrix ist. Geben Sie die Schmidt-Zahl n_s an; unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle (i) $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ parallel und (ii) $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ nicht parallel.

(e) Berechen Sie nun die von-Neumann-Entropie für die beiden Fälle (i) $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ parallel und (ii) $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ orthogonal.