Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dipl. Phys. Julia Kabuß, Wassilij Kopylov, MSc.

3. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Bis Do. 14.11.2013 8:25 vor Beginn der Vorlesung im EW 203
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in maximal Vierergruppen.

Aufgabe 5 (20 Punkte): *Zweiteilchenzustände und Eigenwertprobleme*

Betrachten Sie den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ des Zwei-Spin-Systems. $|i\rangle_k \in \mathcal{H}_k, k \in \{1,2\}$ ist dabei die Basis der Spin-Einteilchen-Wellenfunktion des k-ten Einteilchen-Hilbertraums und $i \in \{1/2 \equiv\uparrow, -1/2 \equiv\downarrow\}$. D.h. für $|i\rangle_k$ gelten die bekannten Eigenwertgleichungen $\hat{S}_k^z|i\rangle_k = \hbar m_{k,i}|i\rangle_k, m_{k,i} \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ und $\hat{\mathbf{S}}_k^2|i\rangle_k = \frac{3}{4}\hbar^2|i\rangle_k$. Wir entwickeln den Zwei-Teilchen-Zustand $|\phi\rangle$ nach den Einteilchenfunktionen $|\phi\rangle = \sum_{i,j} a_{i,j}|i\rangle_1|j\rangle_2,\ i,j \in \{\uparrow,\downarrow\}$. Und wir definieren einen neuen Operator $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$.

1. Spinleiteroperatoren (4 Punkte)
   Der Spin-Leiteroperator ist definiert durch $\hat{S}_k^{\pm} = \hat{S}_k^x \pm i\hat{S}_k^y$. Zeigen Sie dessen Wirkung auf die Einteilchenbasis $|i\rangle_k$:
   $$\hat{S}_k^{\pm}|i\rangle_k = f_{k,i}^{\pm}|i \pm 1\rangle_k \text{ mit } f_{k,i}^{\pm} = \hbar\sqrt{\frac{3}{4} - m_{k,i}(m_{k,i} \pm 1)}.$$
   Tipps: Betrachten Sie dazu das Konstrukt $\hat{S}_k^z\hat{S}_k^{\pm}|i\rangle_k$, verwenden Sie eine geeignete Kommutatorrelation (nur hier wird die explizite Definition des Leiteroperators gebraucht) sowie Normierungseigenschaft.
   Hinweis: Wegen Drehimpulseigenschaften gilt, $[\hat{S}_k^l, \hat{S}_k^m] = i\hbar\epsilon_{l,m,n}\hat{S}_k^n, \quad l,m,n \in x,y,z.$

2. Zweiteilchenoperator und Zweiteilchenzustand (9 Punkte)
   (a) Berechnen Sie nun die Wirkung des neuen Operators $\hat{\mathbf{S}}^z$ auf den Zustand $|i\rangle_1|j\rangle_2$.
   (b) Berechnen Sie die folgende Wirkung des neuen Operators $\hat{\mathbf{S}}^2$ auf den Zustand $|i\rangle_1|j\rangle_2$:
   $$\hat{\mathbf{S}}^2|i\rangle_1|j\rangle_2 = \hbar^2(\frac{3}{2}+2m_{1,i}m_{2,j})|i\rangle_1|j\rangle_2+f_{1,i}^{+}\cdot f_{2,j}^{-}|i+1\rangle_1|j-1\rangle_2+f_{1,i}^{-}\cdot f_{2,j}^{+}|i-1\rangle_1|j+1\rangle_2.$$
   Hinweis: Benutzen Sie u.a. die Spin-Leiteroperatoren.
   (c) Kann der Zustand $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ die Wellenfunktion von einem ununterscheidbaren Teilchen sein?

Bitte wenden.

3. Neue Zweiteilchenbasis (7 Punkte)
Wir suchen jetzt eine neue Zweiteilchenbasis $|S, M_S\rangle$, die die neuen Operatoren $\hat{\mathbf{S}}^z$ und $\hat{\mathbf{S}}^2$ als Eigenfunktonen haben. Dabei sind S, M_S zwei neue Quantenzahlen, anstelle von den zwei alten Quantenzahlen $m_{1,i}, m_{2,i} \in \{\pm\frac{1}{2}\}$.

   (a) Erklären Sie kurz den Zusammenhang zwischen den neuen und alten Quantenzahlen (siehe VL).

   (b) Schreiben Sie die folgenden vier Zweiteilchenzustände in der neuen Zweiteilchenbasis auf: i) $|\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$, ii)$|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$, iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 + |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2)$, iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 - |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2)$. Welche nennt man davon Triplett- welche Singulettzustände und warum? Welche Zustände davon sind symmetrisch, welche antisymmetrisch?

   (c) Zeigen Sie nun unter Benutzung der vorhergehenden Ergebnisse, dass die Funktionen i)-iv) Eigenfunktionen von $\hat{\mathbf{S}}^z$ und $\hat{\mathbf{S}}^2$ sind.
   Wie lautet dann das Eigenwertproblem von $\hat{\mathbf{S}}^z|S, M_S\rangle$ und $\hat{\mathbf{S}}^2|S, M_S\rangle$?

   (d) Erklären Sie kurz, was man unter „guten“ Quantenzahlen versteht.