Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 19. Dezember 2013

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dipl. Phys. Julia Kabuß, Wassilij Kopylov, MSc.

10. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Bis Do. 23.01.2014 8:25 vor Beginn der Vorlesung im EW 203
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in maximal Vierergruppen.

Aufgabe 15 (6 Punkte): *Pauli-Matrizen*
Die drei Pauli-Matrizen, σ_i $(i \in \{1,2,3\})$, sind unitär, hermitesch und erfüllen die Gleichung $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 = i\,\mathbb{1}$.

(a) Zeigen Sie , dass die Pauli-Matrizen die Kommutator-Ralation, $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\sigma_k$, und die Antikommutator-Relation, $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\,\mathbb{1}$, erfüllen.

(b) Zeigen Sie damit, dass $\sigma_i\sigma_j = i\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1}$ gilt.

(c) Zeigen Sie nun die in der Vorlesung benutzte Identität:

$$(\sigma \cdot \mathbf{A})\,(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\,\mathbb{1} + i\sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\ .$$

Hier ist $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ein Vektor mit den drei Pauli-Matrizen als Einträge und $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ sind Vektoren mit drei Skalaren als Einträge.

Aufgabe 16 (4 Punkte): *Dirac-Koeffizienten*
In der Vorlesung haben Sie u.a. durch den Vergleich mit der Klein-Gordon-Gleichung Bedingungen hergeleitet, die die Dirac-Koeffizienten α^k, β erfüllen müssen.
Verifizieren Sie, dass die folgenden Koeffizienten diese Bedingungen erfüllen $(k = 1, 2, 3)$:

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

mit

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folgende Eigenschaften sind zu zeigen:

(a) α^k, β sind hermitesche Matrizen.

(b) $\alpha^l\alpha^k + \alpha^k\alpha^l = 2\delta_{kl}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$.

(c) $\alpha^k\beta + \beta\alpha^k = 0$.

(d) $(\alpha^k)^2 = \beta^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$.

(f) $\mathsf{Sp}[\alpha^k] = 0$.

Aufgabe 17 (7 Punkte): *Erhaltungsgrößen in der Dirac-Theorie*
Der Dirac-Hamiltonian eines freien Teilchens ist $\hat{H} = c\sum_{k=1}^{3} \hat{\alpha}^k \hat{p}_k + \hat{\beta} m_0 c^2$. Die Komponenten des Spinoperators $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$ sind durch $\hat{S}_k = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ nicht mit $\hat{H}$ vertauscht. Nutzen Sie dafür die Vertauschungsrelationen des Orts- und Impulsoperators.

(b) Zeigen Sie, dass der Spinoperator ebenfalls nicht mit $\hat{H}$ vertauscht.

(c) Zeigen Sie schließlich, dass jedoch der Gesamtdrehimpuls $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ mit $\hat{H}$ vertauscht.