Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dipl. Phys. Julia Kabuß, Wassilij Kopylov, MSc.

7. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Bis Do. 12.12.2013 8:25 vor Beginn der Vorlesung im EW 203
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in maximal Vierergruppen.

Aufgabe 11 (17 Punkte): *Rabioszillationen im Zwei-Niveau-System.*
Ein elektronisches Zwei-Niveau-System mit der Ankopplung der Elektronen an ein externes Lichtfeld lässt sich durch folgende Differentialgleichungen für $p = \langle a_1^\dagger a_2 \rangle$ und $f = \langle a_2^\dagger a_2 \rangle = 1 - \langle a_1^\dagger a_1 \rangle$ beschreiben (mehr im Tutorium):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p =& - i(\omega_2 - \omega_1)p + i\Omega(t)(1 - 2f) \\ \frac{d}{dt} f =& + 2\mathrm{Im}[\Omega(t)p] \end{aligned}$$

Hierbei ist $\Omega(t)$ die Rabifrequenz.

(a) Sei die Einhüllende der Rabifrequenz $\tilde{\Omega}(t)$ durch $\Omega(t) = \tilde{\Omega}(t)\cos(\omega_L t)$ definiert, wobei ω_L gerade die Frequenz der Trägerschwingung der Anregung ist. Desweiteren sei $p = \tilde{p}e^{-i\omega_L t}$. Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in diesen langsam rotierenden Größen und führen Sie die sogenannte Rotating-Wave-Approximation (RWA) durch, indem Sie Rotationen mit doppelter Lichtfrequenz streichen. Mit der Verstimmungsfrequenz (detuning) $\Delta = \omega_L + \omega_1 - \omega_2$ führt dies zu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{p} =& i\Delta\tilde{p} + \frac{i}{2}\tilde{\Omega}(t)(1 - 2f) \\ \frac{d}{dt} f =& \mathrm{Im}[\tilde{\Omega}(t)\tilde{p}] \end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie den Fall resonanter Anregung ($\Delta = 0$) mit reellem $\tilde{\Omega}(t)$. Benutzen Sie hier und für die folgenden Aufgabenteile die Anfangsbedingung: $f(-\infty) = p(-\infty) = 0$.

1) Lösen sie explizit das obige Gleichungssystem für $\tilde{p}(t)$ und $f(t)$, indem sie die Größe $\theta(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \tilde{\Omega}(t')dt'$ einführen [Lösung: $\tilde{p}(t) = \frac{i}{2}\sin\theta(t)$]. Berechnen Sie daraus $f(t)$.
2) Diskutieren Sie die kurz die erhaltenen Lösung.
3) In welchem Endzustand befindet sich das System, wenn die Pulsfläche $\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \Omega(t)$ gerade die Werte $\frac{\pi}{2}$, π und 2π annimmt?
4) Bestimmen Sie für folgende Pulsformen die analytischen Lösungen
   i. Rechteckpuls: $\tilde{\Omega}(t) = \begin{cases} A/\tau & \text{für } -\tau < t < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
   ii. Kosinuspuls: $\tilde{\Omega}(t) = \begin{cases} A\pi/(2\tau)\cos(\pi t/\tau) & \text{für } -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
5) Plotten Sie nun $f(t)$, $\mathrm{Im}[\tilde{p}(t)]$ und $1/2 \cdot \Omega(t)$ aus der Teilaufgabe 4) im Bereich von $t = -10..10$ps für $\tau = 5$ps und $A = 3\pi$: Interpretieren Sie die Ergebnisse.