Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dipl. Phys. Julia Kabuß, Wassilij Kopylov, MSc.

8. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Bis Do. 09.01.2014 8:25 vor Beginn der Vorlesung im EW 203

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in maximal Vierergruppen.

Aufgabe 12 (15 Punkte): *Elektron-Phonon-Wechselwirkung*

Der Hamiltonoperator eines elektronischen Zweiniveausystems, dass an ein phononisches Bad und an ein klassisches externes Feld koppelt, hat die Form:

$$H = \sum_{i=1,2} \hbar\omega_i a_i^\dagger a_i + \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha b_\alpha^\dagger b_\alpha + \hbar \sum_\alpha (g_\alpha^{22} - g_\alpha^{11}) a_2^\dagger a_2 (b_\alpha^\dagger + b_\alpha) - \hbar \sum_{i,j=1,2} \Omega_{ij}(t) a_i^\dagger a_j. \quad (1)$$

Mit den elektronischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_i^{(\dagger)}$ und den entsprechenden Operatoren $b_\alpha^{(\dagger)}$ der Phononen in den Moden α. Die Phononenergie ist ω_α und die diagonale Elektron-Phonon-Kopplung g_α^{ii}. $\Omega_{ij}(t)$ beschreibt die Kopplung an das externe Lichtfeld (mit $\Omega_{ii} = 0$ und $\Omega = \Omega_{12} = \Omega_{21}$).

1. Verwenden Sie die Heisenbergsche Bewegungsgleichung, um die Zeitableitung der mikroskopischen Polarisation $p = \langle a_1^\dagger a_2 \rangle$ für den Fall linearer Optik zu bestimmen;

$$\frac{d}{dt} p = -i(\omega_2 - \omega_1 - i\gamma)p + i\Omega - i\sum_\alpha \tilde{g}_\alpha \left(\langle a_1^\dagger a_2 b_\alpha \rangle + \langle a_1^\dagger a_2 b_\alpha^\dagger \rangle \right).$$

   Hinweis: in linearer Optik ($\Omega << 1$) ist $\langle a_1^\dagger a_1 \rangle \approx 1$ und $\langle a_2^\dagger a_2 \rangle \approx 0$ für den Fall $\omega_1 < \omega_2$. Ferner wurde eine phänomenologische Dephasierungskonstante γ eingefügt.

2. Leiten Sie unter Vernachlässigung der Elektron-Licht Wechselwirkung für die phonon-assistierten Übergangselemente $S_\alpha = \langle a_1^\dagger a_2 b_\alpha \rangle$ und $T_\alpha = \langle a_1^\dagger a_2 b_\alpha^\dagger \rangle$ Bewegungsgleichungen her. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_\alpha &= -i(\omega_2 - \omega_1 + \omega_\alpha - i\gamma)S_\alpha - i\tilde{g}_\alpha p\,(n_\alpha + 1), \\ \frac{d}{dt} T_\alpha &= -i(\omega_2 - \omega_1 - \omega_\alpha - i\gamma)T_\alpha - i\tilde{g}_\alpha p\, n_\alpha. \end{aligned}$$

   Bei der Herleitung wurde die Badannahme für die Phononen verwendet, insbesondere $\langle a_i^\dagger a_j b_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger \rangle = \langle a_i^\dagger a_j b_\alpha b_\beta \rangle = 0$ und $\langle a_i^\dagger a_j b_\alpha^\dagger b_\beta \rangle = \langle a_i^\dagger a_j \rangle \delta_{\alpha\beta} n_\alpha$. Die Besetzung $n_\alpha = \langle b_\alpha^\dagger b_\alpha \rangle$ ist gegeben durch die Bose-Einstein Verteilung $n_\alpha = [\exp(\hbar\omega_\alpha/(k_B T)) - 1]^{-1}$.

3. Führen Sie eine Fouriertransformation der drei Bewegungsgleichungen durch unter Verwendung der Konvention $G(\omega) = \int dt\, e^{+i\omega t} g(t)$.

4. Berechnen Sie $S_\alpha(\omega)$ und $T_\alpha(\omega)$ und setzen dies in die Gleichung für $p(\omega)$ ein, um den folgenden Ausdruck zu erhalten:

$$p(\omega) = \frac{\Omega(\omega)}{i\gamma + \omega + \omega_1 - \omega_2 + \sum_\alpha \tilde{g}_\alpha^2 \left(\frac{n_\alpha + 1}{-i\gamma - \omega - \omega_1 + \omega_2 + \omega_\alpha} + \frac{n_\alpha}{-i\gamma - \omega - \omega_1 + \omega_2 - \omega_\alpha} \right)}.$$

5. Wir betrachten nun nur noch eine Phononmode α. Plotten Sie die Absorption $\alpha(\omega) \sim \mathrm{Im}(p(\omega)/\Omega(\omega))$ linear und logarithmisch mit einem Programm Ihrer Wahl (Mathematica, Maple, Matlab, etc.)- inkl. Ausdrucks des Quellcodes der Plotbefehle - für die folgenden Parameter: $\hbar(\omega_2 - \omega_1) = 1.5\mathrm{eV}$, $\hbar\omega_\alpha = 34\mathrm{meV}$, $\hbar g_\alpha = 5\mathrm{meV}$, $k_B = 8,617 \cdot 10^{-5}\mathrm{eV/K}$. Verwenden Sie dabei die Temperaturen (i) $T = 300\mathrm{K}$, (ii) $T = 100\mathrm{K}$ und (iii) $T = 0.1\mathrm{K}$. Diskutieren Sie die physikalische Ursache der auftretenden Peaks. Insbesondere welche Prozesse bei welchen Temperaturen eine Rolle spielen. Warum haben Phononen auch einen Einfluß nahe dem absoluten Temperaturnullpunkt auf die Spektren?