Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dipl. Phys. Julia Kabuß, Wassilij Kopylov, MSc.

1. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Bis Do. 31.10.2013 8:25 vor Beginn der Vorlesung im EW 203
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 0 (0 Punkte): *Wiederholung zum Selbststudium: Definitionen in abstrakter Diracnotation*

(a) Damit ein Satz von Vektoren die Basis eines Vektorraums bildet, muss unter anderem die $Vollständigkeit$ gewährleistet sein. Wie ist diese definiert?

(b) Welche Eigenschaften muss die Basis eines Vektorraums haben, damit sie $orthonormal$ ist?

(c) Welche Eigenschaften zeichnen einen $selbstadjungierten\ Operator$ aus?

(d) Was haben die drei hervorgehobenen Begriffe mit der Quantenmechanik zu tun? Schreiben Sie jeweils $einen$ Satz.

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Wiederholung Langrange Gleichungen für Felder: Ableitung der Maxwellgleichungen aus einer Lagrangedichte*
Gegeben sei die Lagrangedichte für N Teilchen mit dem Ort $\vec{r}_n$ und der Ladung q_n:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{r}) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{2}\dot{r}_n^2\delta(\vec{r}-\vec{r}_n) - \sum_{n=1}^{N} q_n\delta(\vec{r}-\vec{r}_n)\varphi(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{N} q_n\delta(\vec{r}-\vec{r}_n)\dot{\vec{r}}_n\cdot\vec{A}(\vec{r}) \\ &\quad + \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}(\vec{r})|^2 - \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}(\vec{r})|^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Für ein beliebiges kanonisches Feld $\Psi^{(i)}(\vec{r})$ sind die Lagrange Gleichungen für Felder gegeben als:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^{(i)}} - \sum_{\mu}\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi^{(i)})} = 0 \tag{2}$$

hierbei läuft μ über x, y, z, t. Die Ableitung der Feldgleichungen Eq. (2) wird im Tutorium skizziert.

1. Drücken Sie die Lagrangedichte nur mit Hilfe der Potentiale φ und $\vec{A}$ aus, indem Sie die Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ ersetzen.

2. Stellen Sie die Lagrangegleichung für das skalare Potential φ auf, und zeigen Sie das sich aus diesen die Gleichung $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ ergibt. Überlegen Sie sich dabei, was bei Punktteilchen der Ladungsdichte ρ entspricht.

3. Stellen Sie die Lagrangegleichungen für die Komponenten des Vektorpotentials auf, und zeigen Sie das sich aus diesen die Gleichung $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}$ ergibt. Überlegen Sie sich dabei, was bei Punktteilchen der Stromdichte $\vec{j}$ entspricht.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 2 (8 Punkte): *Operatoren in zweiter Quantisierung: Bose- und Fermi-Operatoren*

In der zweiten Quantisierung werden für das Schrödingerfeld

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}) b_i(t), \quad \psi^\dagger(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i^*(\vec{r}) b_i^\dagger(t) \tag{3}$$

Vertauschungsrelationen eingeführt:

$$[\psi(\vec{r},t), \psi^\dagger(\vec{r}',t)]_- = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad \text{Bosonen,} \tag{4}$$

$$[\psi(\vec{r},t), \psi^\dagger(\vec{r}',t)]_+ = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad \text{Fermionen,} \tag{5}$$

Im Heisenberg-Bild wird die Zeitabhängigkeit von $\psi(\vec{r},t)$ von den Operatoren $b_i^{(\dagger)}(t)$ getragen.

1. **Bosonische Operatoren:** Zeigen Sie explizit durch Einsetzen, dass die jeweiligen Operatoren bosonische bzw. fermionische Kommutatorrelation $[b_i, b_j^\dagger]_\mp = \delta_{i,j}$ erfüllen.

2. Beweisen Sie mithilfe der in 1) gezeigten Kommuatorrelation und vollständiger Induktion, dass für bosonische Operatoren $b^{(\dagger)}$ gilt:

$$bb^{\dagger n} - b^{\dagger n} b = n b^{\dagger n-1} = \frac{\partial (b^{\dagger n})}{\partial b^\dagger}. \tag{6}$$

3. Transformation von Operatoren ins Heisenberg-Bild: Für ein wechselwirkungsfreies bosonisches System ist der Hamiltonoperator durch $H_H = H_0 = \sum_i \hbar\omega_i b_i^\dagger b_i$ gegeben. Zeigen Sie unter Benutzung von 1), dass die Transformation eines Operators $b_i^{(\dagger)}(t) = U^\dagger b_i^{(\dagger)} U$ ins Heisenberg-Bild ergibt:

$$U^\dagger b_i U = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} b_i e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} = e^{-i\omega_i(t-t_0)} b_i, \tag{7}$$

$$U^\dagger b_i^\dagger U = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} b_i^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} = e^{i\omega_i(t-t_0)} b_i^\dagger. \tag{8}$$

   Tipp: Fassen Sie dazu die Transformation als $f(\alpha_i) \equiv U^\dagger b_i U$, wobei $\alpha_i = i\omega_i(t-t_0)$ und bilden Sie die Ableitung.

4. **Fermionische Operatoren:** Betrachten Sie den Mehrteilchenzustand $\phi_n = \Pi_l (b_l^\dagger)^{n_l} \phi_0$, wobei $n_l \in \{0,1\}$ und ϕ_0 der fermionische Grundzustand ist. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\langle \phi_n | b_i^\dagger b_j | \phi_n \rangle = \begin{cases} 0 & , i \neq j, \\ n_i & , i = j. \end{cases} \tag{9}$$

5. Berechnen Sie nun auch für fermionische Operatoren b und $b^\dagger$ mit $H_H = H_0$:

$$f(\alpha_i) \equiv U^\dagger b_i^{(\dagger)} U \tag{10}$$

   unter Benutzung der fermionischen Vertauschungsrelationen in 1) und der Tatsache dass für fermionische Operatoren $b^{\dagger n} = b^n = 0$ $(n > 1)$ gilt. Bilden Sie wieder wie in 3) eine Differentialgleichung für $f(\alpha_i)$.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dipl. Phys. Julia Kabuß, Wassilij Kopylov, MSc.

Vorlesung:

- Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.

Anmeldung:

Die Tutorieneinteilung, Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung "Theoretische Physik VI: Quantenmechanik II" erfolgt über das Moseskontosystem: https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto vom 01.10.-16.10.2013 (Mitternacht).
Eine spätere Anmeldung ist nicht möglich. Benötigt wird ein tubit Nutzerkonto.
Achtung: Räume der Tutorien können kurzfristig wechseln, aktuelle Informationen im Moseskontosystem und auf unserer Homepage.

Webseite:

- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/?137711

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (Anwesenheitsliste).

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur dokumentenechte, handschriftliche Originale akzeptiert. Es werden keine Kopien oder elektronischen Abgaben akzeptiert.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- F. Schwabl, Quantenmechanik für Fortgeschrittene(Springer)
- C. Cohen-Tannoudji, Quantenmechanik Teil 2 (de Gruyter)
- U. Scherz, Quantenmechanik (Teubner)
- W. Greiner, Relativistische Quantenmechanik und Quantentheorie-Spezielle Kapitel, Verlag Harri Deutsch.
- F. Scheck, Quantisierte Felder (Springer)
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik (Springer)
- P. Atkins, Molecular Quantum Mechanics (Oxford University Press)
- M. Fox, Quantum Optics (Oxford University Press)

Einige der Bücher aus dem Springer Verlag stehen im Netz der TU Berlin als PDF zur Verfügung (siehe Webseite mit Link in den UB Bestand).