Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dipl. Phys. Julia Kabuß, Wassilij Kopylov, MSc.

2. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Bis Do. 7.11.2013 8:25 vor Beginn der Vorlesung im EW 203
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in maximal Vierergruppen.

Aufgabe 3 (10 Punkte): *Hamiltonoperator in zweiter Quantisierung*

Gegeben sei der Hamiltonoperator in 2. Quantisierung:

$$H = \int \mathrm{d}\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(\frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}) \tag{1}$$

ohne Vielteilchenwechselwirkungen.

1. Berechnen Sie die Bewegungsgleichung für $\Psi(\mathbf{r}, t)$ mit Hilfe der Heisenbergbewegungsgleichung für ein Fermionisches und ein Bosonisches Feld $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Zeigen Sie insbesondere, dass gilt:

$$\imath\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, t) \tag{2}$$

also die Schrödingergleichung für Feldoperatoren.

2. Wiederholen Sie (aus der Vorlesung), dass für einen Hamiltonoperator der Form: $H = \sum_n \varepsilon_n a_n^\dagger a_n$ unter Verwendung der Heisenbergbewegungsgleichung, die Zeitabhängigkeit von a_n zu:

$$a_n^\dagger(t) = e^{\frac{\imath}{\hbar}\varepsilon_n (t - t_0)} a_n^\dagger(t_0) \tag{3}$$

ergibt. Tun Sie dies sowohl für Bosonen und Fermionen.

3. Zeigen Sie unter Verwendung der vorherigen Punkte, dass aus dem Ansatz $\Psi(\mathrm{r}, t) = \sum_n a_n(t) \varphi_n(\mathbf{r})$ die Gültigkeit der stationären Schrödingergleichung:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \varphi_n(\mathbf{r}) = \varepsilon_n \varphi_n(\mathbf{r}) \tag{4}$$

folgt.

Aufgabe 4 (8 Punkte): *Symmetrien der Zweiteilchenwellenfunktion*
Der Zustand bei dem sich genau zwei Teilchen im System befinden und zwar an den Orten $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$ ist gegeben als:

$$|\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^\dagger(\mathbf{r}_2) \Psi^\dagger(\mathbf{r}_1) |0\rangle \tag{5}$$

mit dem Vakuumzustand $|0\rangle$. Der Zustand bei dem ein Teilchen sich im Zustand λ_1 befindet und ein weiteres im Zustand λ_2 ist gegeben als:

$$|\lambda_1, \lambda_2\rangle = a_{\lambda_1}^\dagger a_{\lambda_2}^\dagger |0\rangle. \tag{6}$$

1. Berechnen Sie die Zweiteilchenwellenfunktion, die definiert ist als:

$$\Psi_{\lambda_1, \lambda_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | \lambda_1, \lambda_2 \rangle \tag{7}$$

sowohl für Fermionen als auch für Bosonen. Folgen Sie dabei dem Ansatz aus der Vorlesung.

2. Überprüfen Sie für den Fermionischen und für den Bosonischen Fall, wie sich $\Psi_{\lambda_1, \lambda_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ unter der Vertauschung der beiden Orte $\mathbf{r}_1$,$\mathbf{r}_2$ verhält.