

## 4. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

**Abgabe: Freitag, den 21. November 2014** vor der Übung

Ausgabe: Freitag, den 07. November 2014

Jeder Übungszettel bringt 10 Punkte!

### 1. Die 4-er Beschleunigung

In Analogie zur 4-er Geschwindigkeit  $u^\mu$  wird die 4-er Beschleunigung als

$$\dot{u}^\mu := u^\alpha \partial_\alpha u^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (1)$$

definiert.

Leiten sie die Darstellung der 4-er Beschleunigung in Raum- und Zeitkomponenten ab. Welche Form besitzt diese im momentanen Ruhssystem?

Beachten Sie dabei, daß wir in dieser Aufgabe die Vierer-Geschwindigkeit als ein Feld annehmen wollen, daß z.B. die Bewegung eines Fluids beschreibt ( $u^\mu = u^\mu(x^t)$ ). Zudem ist die Definition der Newtonschen substantiellen Beschleunigung zu Beachten:

$$a^m = \frac{\partial}{\partial t} v^m + v^a \frac{\partial}{\partial x^a} v^m. \quad (2)$$

### 2. Ein bißchen Algebra

In der Allgemeinen Relativitätstheorie spielen die Christoffelsymbole (kein Tensor!)

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\beta\rho,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho})$$

eine fundamentale Rolle. Zeigen Sie deren Symmetrie im unteren Indexpaar für eine symmetrische Metrik  $g_{\alpha\beta}$ .

Aus den Christoffelsymbolen und deren partiellen Ableitungen wird der Riemannsche Krümmungstensor definiert durch:

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\sigma - \Gamma_{\delta\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma.$$

Weisen Sie die Antisymmetrie im hinteren Indexpaar nach.

Zeigen Sie weiterhin dass gilt:

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha + R_{\delta\beta\gamma}^\alpha + R_{\gamma\delta\beta}^\alpha = 0$$

Benutzen Sie dabei die oben gezeigte Symmetrie der Christoffelsymbole.

### 3. Energie-Impuls-Bilanz eines idealen Fluids in der Speziellen Relativitätstheorie

Der Energie-Impuls-Tensor eines idealen Fluids ist gegeben durch

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{u}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta + p h^{\alpha\beta},$$

wobei  $\mu$  die Massendichte,  $p$  der Druck und  $u^\alpha$  das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit ist.  $h^{\alpha\beta} := u^\alpha u^\beta / c^2 + \eta^{\alpha\beta}$  ist dabei der sogenannte Projektor und  $u$  (ohne Indizes) die Dichte der inneren Energie. Nutzen Sie in dieser Aufgabe die Minkowskimetrik in der Form  $\eta^{\alpha\beta} = \text{diag}[1, 1, 1, -1]$

(I) Leiten Sie die relativistische Energie-Bilanz und die relativistische Euler-Gleichung ab:

$$h_a^i \partial_b T^{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\mu + \frac{u+p}{c^2}\right) \frac{d}{d\tau} u^i + h^{ik} \partial_k p = 0 \quad , \quad (3)$$

$$u_a \partial_b T^{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_b \left( \left[\mu + \frac{u}{c^2}\right] u^b \right) + \frac{p}{c^2} \Theta = 0 \quad . \quad (4)$$

(kräftefreier Fall) für diesen Tensor ab. Darin bezeichnen  $\dot{a}^\beta := a_{,\alpha}^\beta u^\alpha$  die Eigenzeitableitung und  $\Theta := u_{,\alpha}^\alpha$  die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes.

(II) Beweisen Sie, daß die Energie-Bilanz dieser Gleichung im nichtrelativistischen Grenzfall in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_i (\mu v^i) = 0 \quad (5)$$

übergeht. Benutzen Sie die Zerlegungen für  $(u^\alpha) = \gamma(c, v^i)$  und beachten Sie, daß  $\gamma \cong 1$ , sowie  $c^2 \gg v^2$  gilt.

(III) Zeigen Sie, daß die rel. Euler-Gleichung im Newtonschen Grenzfall ( $v^2 \ll c^2$ ) in die bekannten Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik übergehen:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu v^k) + \partial_i (\mu v^i v^k + p \delta^{ik}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \frac{d}{dt} \mathbf{v} + \text{grad } p = 0. \quad (6)$$

Dabei gilt die Definition:

$$\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + v^k \partial_k = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) . \quad (7)$$

Warum muß man sich hier nur um die räumlichen Komponenten kümmern / Warum enthält die zeitliche Komponente keine zusätzliche Information?

**Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!**

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.

Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:

gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de