Technische Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. von Borzeszkowski; Dr. Chrobok; Schellstede

6. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Freitag, den 05. Dezember 2014 vor der Übung
Ausgabe: Freitag, den 21. November 2014
Jeder Übungszettel bringt 10 Punkte!

Autoparallele

Leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ab, der die Koordinaten jeder Kurve genügen, deren Tangentialvektor entlang der Kurve paralleltransportiert wird. Eine solche Kurve heißt Autoparallele. Der Tangentenvektor ist definiert durch:

$$\tau^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} \,. \tag{1}$$

Dabei ist σ der Kurvenparameter. Gehen Sie dabei von der Definition der kovarianten Ableitung aus. Berücksichtigen Sie, daß ein parallel transportierter Vektor entlang des Transportweges kovariant konstant ist! (Die Konnexion in der kovarianten Ableitung braucht dazu weder symmetrisch noch die Christoffelsche zu sein.)

Geodäte

Leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten A, B ab. Nutzen Sie dazu die infinetisimale Abstandsdefinition:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \,. \tag{2}$$

Die Länge eines Kurvenstücks zwischen zwei Punkten A und B ist daher gegeben durch:

$$s = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}}\,\mathrm{d}\sigma \,. \tag{3}$$

Sie müssen also dieses Integral variieren.

Wie muß die affine Konnexion beschaffen sein, damit Geodäte und Autoparallele zusammenfallen. Wodurch werden Geodäte und Autoparallele in der Euklidischen Geometrie repräsentiert?

Vertauschbarkeit der zweiten kovarianten Ableitung

Berechnen Sie den Ausdruck

$$A_{\alpha;[\beta;\gamma]}$$

und vereinfachen Sie diesen soweit wie möglich. Welches Objekt erhält man? (Beachten Sie, daß die eckigen Klammern Antisymmetrisierung bedeuten.)

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de