Technische Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. von Borzeszkowski; Dr. Chrobok; Schellstede

9. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Freitag, den 09. Januar 2015 vor der Übung
Ausgabe: Freitag, den 12. Dezember 2014
Jeder Übungszettel bringt 10 Punkte!

Das sphärisch symmetrische Linienelement

Für die Behandlung eines sphärisch symmetrischen Sternmodells ist es zweckmäßig, das Linienelement als kugelsymmetrisch anzusetzen. Kugelsymmetrie bedeutet dabei, daß alle radialen Richtungen im dreidimensionalen Raum $T =$ const. gleichwertig sind und keine dazu senkrechte Richtung ausgezeichnet ist. In Kugelkoordinaten R, θ, ϕ gilt:

$$\mathrm{d}^{(3)}s^2 = g_{11}(R, cT)\,\mathrm{d}R^2 + f(R, cT)\left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right] .$$

Um keine tangentialen Richtungen auszuzeichnen, wählen wir zudem $g_{T\theta} = g_{T\phi} = 0$ und lassen die noch übrigen Komponenten g_{10} und g_{00} nur von R und T abhängen. Damit bekommen wir folgenden Ansatz für das vollständige Linienelement:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}(R, cT)\,c^2\mathrm{d}T^2 + 2g_{10}(R, cT)\,c\mathrm{d}T\mathrm{d}R + g_{11}(R, cT)\,\mathrm{d}R^2 + f(R, cT)\left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right] .$$

Welche Koordinatentransformation bringt das Linienelement auf die folgende allgemeine Form:

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{\nu(r,t)}c^2\,\mathrm{d}t^2 + e^{\lambda(r,t)}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right] =: -c^2\,\mathrm{d}\tau^2 . \qquad (1)$$

In einem zweiten Schritt ist jetzt der Ricci-Tensor für den statischen Fall zu berechnen ($\nu(r,t) = \nu(r)$ und $\lambda(r,t) = \lambda(r)$). Weil dieser nur aus der Metrik und ihren Derivierten aufgebaut ist, besitzt er dieselben Invarianzeigenschaften wie diese. Man kann daher erhebliche Rechenarbeit einsparen, wenn man dies berücksichtigt. Welche Komponenten des Ricci-Tensors verschwinden durch die Symmetrieeigenschaften?

Integrieren Sie jetzt die Vakuumfeldgleichungen. Das Ergebnis ist die Schwarzschildmetrik im Außenraum eines Sterns.

Wie können die auftretenden Integrationskonstanten interpretiert werden?

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de