Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 17. Oktober 2014

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dr. Torben Winzer
Mathias Hayn, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Robert Kohlhaas, Henrik Kowalski

# 1. Übungsblatt – Elektrodynamik

**Abgabe: Mi. 29. Oktober 2015 bis 12:10 Uhr im Hörsaal**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden* **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

**Aufgabe 1 (2+3+1+2+2=10 Punkte):** *Rechnen*
Im Folgenden sei $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ der Ortsvektor, $r = |\mathbf{r}|$ der Betrag hiervon, $f = f(\mathbf{r})$ ein skalares Feld und $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}), \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r})$ zwei Vektorfelder. Mit $\nabla$ und $\Delta$ bezeichen wir den Nabla-, bzw. den Laplace-Operator. Die Ergebnisse dieser Aufgabe können Sie für alle folgenden Aufgaben dieses Zettels und dieses Semesters nach Belieben verwenden.

(a) Beweisen Sie die Relationen:

$$(i)\ \nabla \cdot (f\mathbf{a}) = f\,\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla f, \qquad (ii)\ \nabla \times (f\mathbf{a}) = f\,\nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla f. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$(i)\ \nabla \times (f\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = f\,\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \nabla f \quad \text{und} \tag{2}$$
$$(ii)\ \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) \tag{3}$$

gilt.

(c) Beweisen Sie außerdem die Relation:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}. \tag{4}$$

(d) Berechnen Sie $\nabla \frac{1}{r}$ und $\Delta \frac{1}{r}$ für $r > 0$.

(e) Betrachten Sie das Vektorfeld $\mathbf{A} = f\,\mathbf{r}$. Bestimmen Sie $f$, so dass $\mathbf{A}$ für $r > 0$ quellenfrei ist.

**Aufgabe 2 (3+3+3=9 Punkte):** *Rotation und Divergenz*
Betrachten Sie das für $r > 0$ definierte Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}, \tag{5}$$

mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ und dem konstanten Vektor $\boldsymbol{\mu}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

(b) Visualisieren Sie das Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ in der $x$–$y$-Ebene.

(c) Berechnen Sie $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$.