Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dr. Torben Winzer, Mathias Hayn, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Robert Kohlhaas, Henrik Kowalski

2. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Mi. 5. November 2015 bis 12:10 Uhr im Hörsaal

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Lagrangeformalismus für semiklassisches Feld*

Betrachten Sie das skalare Feld ψ für ein geladenes Teilchen mit der Ladung q und der Masse m, welches mit dem elektromagnetischen Feld wechselwirkt. Leiten Sie ausgehend von der Lagrangedichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\psi - q\mathbf{A}\psi\right)\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\psi^* + q\mathbf{A}\psi^*\right) - \frac{\hbar}{2i}\left[\psi^*\partial_t\psi - \left(\partial_t\psi^*\right)\psi\right] - \psi^* V\psi + \\ &+ \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 - \psi^* q\phi\psi \\ =& \mathcal{L}\left(\psi, \psi^*, \mathbf{A}, \phi, \nabla\psi, \nabla\psi^*, \ldots\right)\end{aligned}$$

die Potentialgleichungen für $\mathbf{A}$ und ϕ, die inhomogenen Maxwellgleichungen und die Schrödingergleichung her. Identifizieren Sie dabei auch die quantenmechanische Ladungs- und Stromdichte q_{QM} und $\mathbf{j}_{QM}$.

Aufgabe 2 (1+5+6+1=13 Punkte): *Helmholtzsche Vektortheorem*

Nach dem Helmholtz-Theorem kann jedes hinreichend stark abfallende Vektorfeld $\mathbf{V}$ eindeutig in einen Wirbel- und einen Quellenanteil zerlegt werden:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}^l(\mathbf{r}) + \mathbf{V}^t(\mathbf{r})\ .$$

Die Anteile dieser Longitudinal-Transversal-Zerlegung sind gegeben durch

$$\mathbf{V}^l(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{V}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\ , \qquad \mathbf{V}^t(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}}\times\left(\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\nabla_{\mathbf{r}'}\times\mathbf{V}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\ .$$

1. Beweisen Sie zunächst die Identität:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\mathbf{V}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \tag{1}$$

2. Beweisen Sie die Gültigkeit der Longitudinal-Transversal-Zerlegung ausgehend von der Identität in Gl. (1).

3. Zur Lösung von vielen Problem in der Elektrodynamik wird eine Entwicklung nach ebenen Wellen verwendet, auch für die Fouriertransformation existiert eine Zerlegung in transversale und longitudinale Anteile. Zeigen Sie, dass bei der Entwicklung $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \sum\limits_{\mathbf{k}}\mathbf{V}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ nach ebenen Wellen die Koeffizienten durch

$$\mathbf{V}^l_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_{\mathbf{k}}}{k^2}\mathbf{k} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}^t_{\mathbf{k}} = -\frac{\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{V}_{\mathbf{k}})}{k^2}$$

gegeben sind. Beweisen Sie dazu die Identitäten

(a) $\int d^3r \frac{\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \stackrel{!}{=} \lim_{\gamma\to 0} \int d^3r \frac{\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} e^{-\gamma|\mathbf{r}|} \stackrel{z.z.}{=} \frac{4\pi}{k^2}$ und

(b) $\nabla_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

4. Warum spricht man von longitudinalem und transversalem Anteil?