Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 22. Oktober 2014

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dr. Torben Winzer
Mathias Hayn, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Robert Kohlhaas, Henrik Kowalski

4. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Mi. 19. November 2014 bis 12:10 Uhr im Hörsaal

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (1.5+1.5+3=6 Punkte): *Retardierte Potentiale*
Gegeben sei die Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \omega \mathbf{d}_0 \sin(\omega t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$.

1. Leiten Sie mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung einen Ausdruck für die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ her. Nehmen Sie als Anfangsbedingung $\rho(\mathbf{r}, t = 0) = 0$ an. Was ist die physikalische Interpretation der Ladungsdichte?
2. Berechnen Sie das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in Lorenz-Eichung.
3. Berechnen Sie das skalare Potential $\Phi(\mathbf{r}, t)$ in Lorenz-Eichung.

Aufgabe 2 (3+3+6=12 Punkte): *Multipolentwicklung*

1. Leiten Sie die Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten analog zur Vorlesung her. Entwickeln Sie dazu das elektrostatische Potential
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
in eine Taylorreihe bis zur 2. Ordnung (entsprechend dem Quadrupoltensor). Bringen Sie die Entwicklung in die Form
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \right)$$
indem Sie das Quadrupoltensor $\mathbf{Q}$ so definieren, dass es spurfrei ist ($\sum_i Q_{ii} = 0$). Wie sind die Gesamtladung q und das Dipolmoment $\mathbf{d}$ hier definiert?
2. Zeigen Sie durch Rechnung, wann das Quadrupoltensor unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist.
3. Betrachten Sie folgende mikroskopische Ladungsverteilung ($a > 0$, $b > 0$):
$$\rho(\mathbf{r}) = q_1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{e}_x - a\mathbf{e}_y) + q_1\delta(\mathbf{r} + \mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y) + q_2\delta(\mathbf{r} + \mathbf{e}_x - b\mathbf{e}_y) + q_2\delta(\mathbf{r} - \mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y)$$
mit Ladungen $q_1 > 0$ und $q_2 < 0$. Zeichnen Sie die Ladungsverteilung und berechnen Sie das Potential in Multipolentwicklung bis zum Quadrupoltensor. Unter welchen Umständen dominieren jeweils Monopol-, Dipol- oder Quadrupolterm dieser Ladungsverteilung? Wie vereinfacht sich der Quadrupoltensor für letzteren Fall?

Rückseite bitte beachten!

Aufgabe 3 (2+1=3 Punkte): *Magnetisches Moment*
Betrachten Sie ein Punktteilchen mit der Ladung Q, dass sich auf einer Kreisbahn um die z-Achse mit Radius R und um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω bewegt.

1. Geben Sie die Stromdichte $\mathbf{j}(r)$ des Punktteilches an und verwenden Sie den Ausdruck

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{1}$$

   um das magnetische Moment des Punktteilchens zu berechnen.

2. Drücken Sie das magnetische Moment durch den Drehimpuls L des Punktteilchens aus. In der Quantenmechanik nimmt der Drehimpuls diskrete Werte an $L = \hbar l$, wobei l eine dimensionslose Zahl ist. Es gilt dann

$$\mu = \mu_0 g l \tag{2}$$

   wobei $\mu_0 = Q\hbar/2m$ das Magneton des Teilchens und g der gyromagnetische Faktor ist. Bestimmen Sie den gyromagnetischen Faktor des Teilchens.