Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dr. Torben Winzer
Mathias Hayn, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Robert Kohlhaas, Henrik Kowalski

5. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Mi. 26. November 2014 bis 12:10 Uhr im Hörsaal

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (4+1=5 Punkte): *Liénard–Wiechert-Potentiale*
In der Vorlesung wurde ausgehend von der allgemeinen Formel der retardierten Potentiale in der Lorenz-Eichung das skalare Potential

$$\Phi(\mathbf{r},t) = k\frac{1}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')| - [\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')]\cdot\dot{\mathbf{r}}_0(t')}. \tag{1}$$

eines Punktteilchens der Ladung q, welches sich auf der Trajektorie $\mathbf{r}_0(t)$ befindet, berechnet. Hier und im Folgendem wurde $k = \frac{q\,c}{4\pi\varepsilon_0}$ eingeführt.

(a) Vollziehen Sie diese Rechnung nach und leiten Sie eine entsprechende Formel für das Vektorpotential her:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{k}{c^2}\frac{\dot{\mathbf{r}}_0(t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')| - [\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')]\cdot\dot{\mathbf{r}}_0(t')}. \tag{2}$$

Dabei ist t' die aus der Vorlesung bekannte retadierte Zeit. Diese ist durch die kausale Lösung der Gleichung

$$c(t-t') = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')| \tag{3}$$

gegeben. In den Gleichungen (1), (2) und (3) wird $\mathbf{r}_0$ und $\dot{\mathbf{r}}_0$ stets bei der retardierten Zeit ausgewertet. Somit können Sie gerne auch abkürzend $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}_0(t')$ und $\dot{\mathbf{r}}_0 \equiv \dot{\mathbf{r}}_0(t') \equiv \partial_{t'}\mathbf{r}_0(t')$ schreiben (beachten Sie dabei die Ableitung nach t').

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung (3) in der Tat nur eine Lösung besitzt.

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Gleichförmig bewegte Punktladung*
Berechnen Sie die Liénard–Wiechert-Potentiale aus Aufgabe 1 für eine gleichförmig bewegte Punktladung mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_0 = v\,\mathbf{e}_z$, mit $v = konst.$. Zeigen Sie, dass die elektrodynamischen Potentiale durch

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{k}{c}\frac{1}{\tilde{R}} \text{ und } \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{k}{c^3}\frac{v}{\tilde{R}}\mathbf{e}_z \tag{4}$$

gegeben sind. Dabei ist $\tilde{R} = \pm\sqrt{(1-\beta^2)(x^2+y^2)+(z-v\,t)^2}$ und $\beta = \frac{v}{c}$. Nehmen Sie an, das Teilchen befinde sich zur Zeit $t=0$ im Ursprung. Bestimmen Sie für beide Vorzeichen von $\tilde{R}$ den physikalischen Geltungsbereich. Wie sehen die elektrodynamischen Potentiale für den Grenzfall $v \to c$ aus.

Aufgabe 3 (1+2+3+2+2=10 Punkte): *Elektrodynamik einer bewegten Punktladung*
Nun sollen ausgehend von den Liénard–Wiechert-Potentialen in Gl. (1) und Gl. (2) aus Aufgabe 1 das elektrische und magnetische Feld einer sich beliebig bewegenden Punktladung berechnet werden. Beachten Sie, dass auch in dieser Aufgab $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$ und $\ddot{\mathbf{r}}_0$ stets bei der retardierten Zeit ausgewertet werden und Sie damit abkürzend $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}_0(t')$, $\dot{\mathbf{r}}_0 \equiv \dot{\mathbf{r}}_0(t') \equiv \partial_{t'}\mathbf{r}_0(t')$ und $\ddot{\mathbf{r}}_0 \equiv \ddot{\mathbf{r}}_0(t') \equiv \partial_{t'}\dot{\mathbf{r}}_0(t')$ schreiben können.

(a) Zeigen Sie dazu zunächst, dass für die Ableitung der retardierten Zeit nach dem Ort und der Zeit die Relationen

$$\partial_n t' = -\frac{x_n - x_{0,n}}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\dot{\mathbf{r}}_0} \text{ und } \partial_t t' = \frac{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\dot{\mathbf{r}}_0} \tag{5}$$

gelten. Dabei ist $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$ und $\mathbf{r}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})^T$.

(b) Berechnen Sie außerdem folgende Ableitungen:

$$\partial_n|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = -c\,\partial_n t', \qquad \partial_n(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\dot{\mathbf{r}}_0 = (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\ddot{\mathbf{r}}_0\,\partial_n t' + \dot{x}_{0,n} - \dot{\mathbf{r}}_0^2\,\partial_n t', \tag{6}$$

$$\partial_t|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\cdot\dot{\mathbf{r}}_0\,\partial_t t', \quad \partial_t(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\dot{\mathbf{r}}_0 = [-\dot{\mathbf{r}}_0^2 + (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\ddot{\mathbf{r}}_0]\,\partial_t t'. \tag{7}$$

(c) Benutzen Sie nun die Ergebnisse der Aufgabenteile (a) und (b) um $\partial_n\Phi$ und $\partial_t\mathbf{A}$ zu

$$\partial_n\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{k}{(cR - \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{r}}_0)^3}\left[\Big(cR - \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{r}}_0\Big)\dot{x}_{0,n} - \Big(c^2 - \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \mathbf{R}\cdot\ddot{\mathbf{r}}_0\Big)R_n\right] \text{ und} \tag{8}$$

$$c^2\partial_t\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = k\frac{cR}{(cR - \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{r}}_0)^3}\left[\Big(cR - \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{r}}_0\Big)\Big(\ddot{\mathbf{r}}_0 - \frac{c\dot{\mathbf{r}}_0}{R}\Big) + \Big(c^2 - \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \mathbf{R}\cdot\ddot{\mathbf{r}}_0\Big)\dot{\mathbf{r}}_0\right] \tag{9}$$

zu bestimmen. Dabei wurde $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)^T := \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ und $R = |\mathbf{R}|$ eingeführt.

(d) Berechnen Sie damit schließlich das $\mathbf{E}$-Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = k\frac{1}{(1 - \mathbf{e}_R\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\left[\frac{1}{c\,\gamma^2 R^2}(\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{c^2 R}\,\mathbf{e}_R \times \Big([\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\beta}] \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\Big)\right] \tag{10}$$

Hier ist $\mathbf{e}_R := \mathbf{R}/R$, $\boldsymbol{\beta} = \dot{\mathbf{r}}_0/c$, $\beta = |\boldsymbol{\beta}|$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

(e) Berechnen Sie außerdem das $\mathbf{B}$-Feld und zeigen Sie, dass dieses die einfache Relation

$$c\,\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}_R \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \tag{11}$$

erfüllt.