Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 28. November 2014

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter, Dr. Torben Winzer
Mathias Hayn, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Robert Kohlhaas, Henrik Kowalski

7. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Mi. 10. Dezember 2014 bis 12:10 Uhr im Hörsaal

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (2+1+2+4+1+2=12 Punkte): *Dielektrische Kugel — Randwertproblem*
Betrachten Sie eine ungeladene Kugel mit dem Radius R und der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_1 > 0$, welche sich in einem Medium mit der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_2 > 0$ befindet. In dieser Aufgabe soll berechnet werden, wie die Kugel ein äußerlich angelegtes homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E}_0 = E_0\,\mathbf{e}_z$ beeinflusst. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Lösen Sie zunächst die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$ in Kugelkoordinaten. Machen Sie hierzu einen geeigneten Separationsansatz und zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung durch

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} (A_l\, r^l + B_l\, r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{1}$$

gegeben ist, dabei sind $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ sind die Kugelflächenfunktionen, A_l und B_l seien zunächst unbekannte Koeffizienten. Nutzen Sie, dass die $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ Eigenfunktionen zum Operator

$$\Delta_{\vartheta,\varphi} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{2}$$

mit den Eigenwerten $-l\,(l+1)$ sind.

(b) Wie vereinfacht sich die allgemeine Lösung aus Gl. (1) für azimuthale Symmetrie?

Wenden Sie sich nun der oben beschriebene Aufgabenstellung zu:

(c) Geben Sie explizit die Stetigkeitsbedingungen für das **E**- und **D**-Feld an der Grenzfläche zwischen Kugel und Medium an. Was folgt hieraus für das Potential? Nutzen Sie die Symmetrie des Systems.

(d) Bestimmen Sie die Koeffizienten A_l und B_l separat für den Innen- und Außenraum der Kugel. Fordern Sie hierzu, neben den Stetigkeitsbedingungen, dass das Potential (i) für alle $\mathbf{r}$ endlich ist und (ii) für $r \to \infty$ das homogene **E**-Feld wiedergibt. Zeigen Sie, dass das Potential durch

$$\Phi(r,\vartheta) = E_0\, r\, \cos\vartheta \begin{cases} -\dfrac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \,, & r < R \\[2ex] \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\,\dfrac{R^3}{r^3} - 1\,, & r > R \end{cases} \tag{3}$$

gegeben ist.

(e) Berechnen Sie das elektrische Feld inner- und außerhalb der Kugel.

(f) Plotten oder skizzieren Sie das elektrische Feld für $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ und $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Aufgabe 2 (1+2+3+1=7 Punkte): *Magnetisierte Kugel — Lösung der Poisson-Gleichung*
In dieser Aufgabe soll das Feld einer homogen magnetisierten Kugel berechnet werden. Die Kugel habe den Radius R und sei mit der Stärke M_0 in x-Richtung magnetisiert.

(a) Das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ist allein durch den Anteil der Magnetisierungsdichte gegeben. Zeigen Sie, dass das Vektorpotential sich als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} M_0 \, \mathbf{e}_x \times \oint_{\partial\mathcal{B}(R)} \mathbf{e}_{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}F(\mathbf{r}') \tag{4}$$

schreiben lässt. Integriert wird hier über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R.

(b) Berechnen Sie das Integral in Gl. (4) um

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{3} M_0 \, \mathbf{e}_x \times \mathbf{r} \begin{cases} 1 \quad , & r < R \\ \left(\dfrac{R}{r}\right)^3 , & r \geq R \end{cases} \tag{5}$$

zu erhalten. Dabei können Sie z.B. benutzen, dass sich der Bruch nach Legendre-Polynomen $P_\ell(x)$ entwickeln lässt:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\cos\gamma). \tag{6}$$

Hier ist γ der Winkel zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ und $r_< = \min(r, r'), r_> = \max(r, r')$.

(c) Berechnen und skizzieren Sie schließlich das **B**- und **H**-Feld. *Hinweis:* Benutzen Sie die Ergebnisse der zweiten Aufgabe des ersten Übungsblatts.

(d) Erfüllen **B** und **H** die entsprechenden Grenzbedingungen?