

Prof. Dr. Andreas Knorr
 Dr. Marten Richter, Dr. Torben Winzer, Mathias Hayn
 Samuel Brem, Robert Kohlhaas, Henrik Kowalski

10. Übungsblatt – Elektrodynamik

Abgabe: Mi. 21. Januar 2015 bis 12:10 Uhr im Hörsaal

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** und **ausführliche Kommentare** zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!

Aufgabe 1 (11 Punkte): *Beugung*

Gegeben sei eine Kreisblende mit Radius R , die folgendes Transmissionsprofil $T(r)$ hat:

$$T(r) = 1 - (r/R)^2. \quad (1)$$

Diese Blende liege in der x - y -Ebene bei $z = 0$. Zeigen Sie ausgehend von der Fraunhofer-Formel, dass mit der folgenden Gleichung die Beugung beschrieben wird:

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \oint dA' e^{-ik \cdot \mathbf{r}'} T(r') (ik + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z) E_0. \quad (2)$$

Skizzieren Sie $T(r)$ und berechnen Sie das Beugungsintegral für eine in z -Richtung eingestrahelte Welle. Stellen Sie $|\Psi(\mathbf{r})|$ und $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ graphisch dar.

Bonusaufgabe 2 (1+1+3+3+1=9 Zusatzpunkte): *Glasfaser*

Betrachten Sie einen dielektrischen Wellenleiter (Glasfaser). Die Glasfaser ist zylindersymmetrisch und besteht aus einem Kern mit Radius R und Brechungsindex n_K sowie einem Mantel mit Brechungsindex n_M .

- (i) In der Faser breite sich eine Welle nur in z -Richtung aus. Machen Sie einen (den Symmetrien des Problems angemessenen) Ansatz für das elektrische und magnetische Feld.
- (ii) Leiten Sie damit aus der Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} - \frac{\partial_t^2}{c^2} \vec{E} = 0$$

die Helmholtzgleichung

$$\Delta_t \vec{E} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \vec{E} = 0$$

für $E_z(r, \phi)$ her. Geben sie dazu den transversalen Laplaceoperator Δ_t explizit in Zylinderkoordinaten an.

- (iii) Leiten Sie daraus für zwei Fälle, eine (bzw. modifizierte) Besselsche Differentialgleichung her (Ansatz: $E_z(r, \phi) = e^{\pm i\ell\phi} e(r)$).
- (iv) Welchen Bedingungen sollten die Lösungen genügen, damit ein möglichst "guter" Wellenleiter entsteht? Wählen Sie die entsprechenden Besselfunktionen für die Lösungen im Mantel und im Kern aus und bestimmen sie die nötigen Beziehungen von n_M , n_K und dem Wellenzahlvektor k (Stetigkeit der Lösung an der Grenze Mantel-Kern beachten!). In welchem Bereich darf die Propagationskonstante liegen?
- (v) Stellen Sie die radiale Intensitätsverteilung der z -Komponente des elektrischen Feldes graphisch da.